绝密★启用前

2021 年普通高等学校招生全国统一考试（乙卷）

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设 $2(z+\overline{z})+3(z-\overline{z})=4+6\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A．$1-2\mathrm{i}$　　B．$1+2\mathrm{i}$　　C．$1+\mathrm{i}$　　D．$1-\mathrm{i}$

2．已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $S\cap T=$（　　）

A．$\varnothing$　　B．S　　C．T　　D．$\mathbf{Z}$

3．已知命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x<1$；命题 $q:\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^{|x|}\geq 1$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A．$p\wedge q$　　B．$\neg p\wedge q$　　C．$p\wedge\neg q$　　D．$\neg(p\vee q)$

4．设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A．$f(x-1)-1$　　B．$f(x-1)+1$　　C．$f(x+1)-1$　　D．$f(x+1)+1$

5．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{4}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

6．将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）

A．60 种　　B．120 种　　C．240 种　　D．480 种

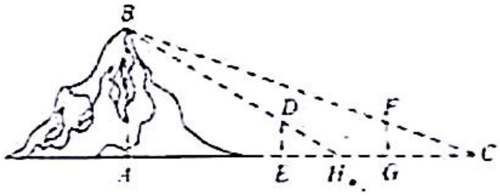
7．把函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图像，则 $f(x)=$（　　）

A．$\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{7\pi}{12}\right)$　　B．$\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$　　C．$\sin\left(2x-\dfrac{7\pi}{12}\right)$　　D．$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

8．在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数，则两数之和大于 $\dfrac{7}{4}$ 的概率为（　　）

A. $\dfrac{7}{9}$　　B. $\dfrac{23}{32}$　　C. $\dfrac{9}{32}$　　D. $\dfrac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高.如图，点E，H，G在水平线AC上，DE和FG是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG称为“表距”，GC和EH都称为“表目距”，GC与EH的差称为“表目距的差”，则海岛的高$AB=$（　　）



A. $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$　　B. $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表高}$

C. $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表距}$　　D. $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表距}$

10．设$a\neq 0$，若$x=a$为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，则（　　）

A．$a<b$　　B．$a>b$　　C．$ab<a^2$　　D．$ab>a^2$

11．设B是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点，若$C$上的任意一点$P$都满足$|PB|\leq 2b$，则$C$的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

12．设$a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$．则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$，则$C$的焦距为_________.

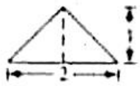
14．已知向量$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(3,4)$，若$(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则$\lambda=$__________.

15．记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60°$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$________.

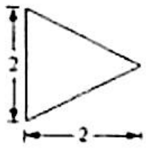
16．以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为___________（写出符合要求的一组答案即可）.

图①

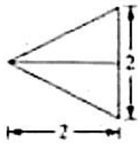
图②



图③



图④



图⑤

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

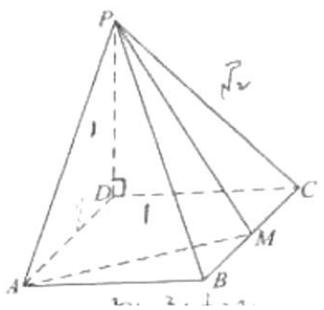
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2．

（1）求 $\overline{x},\overline{y},s_1^2,s_2^2$；

（2）判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果 $\overline{y}-\overline{x}\geq 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）．

18．（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=1$，M 为 BC 的中点，且 $PB\perp AM$．



（1）求 BC；

（2）求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值．

19．（12 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20.（12 分）

设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

（1）求 a;

（2）设函数 $g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$. 证明: $g(x)<1$.

21.（12 分）

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且 F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

（1）求 p;

（2）若点 P 在 M 上，PA,PB 是 C 的两条切线，A,B 是切点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，$\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径为 1.

（1）写出 $\odot C$ 的一个参数方程；

（2）过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+3|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geq 6$ 的解集；

（2）若 $f(x)>-a$，求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试（乙卷）
理科数学参考答案

一、选择题

1. C　2. C　3. A　4. B　5. D　6. C　7. B　8. B　9. A　10. D　11. C　12. B

二、填空题

13.4　14. $\frac{3}{5}$　15. $2\sqrt{2}$　16. ③④（答案不唯一）

三、解答题

（一）必考题

17. （1）$\overline{x}=10,\overline{y}=10.3,s_1^2=0.036,s_2^2=0.04$；（2）新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

18. （1）$\sqrt{2}$；（2）$\frac{\sqrt{70}}{14}$

19. （1）由已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 得 $S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}$，且 $b_n\neq 0$，取 $n=1$，得 $b_1=\frac{3}{2}$，由题意得 $\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$，消积得到项的递推关系 $\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$，进而证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

（2）$a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}$

20. （1）$a=1$；

（2）由（Ⅰ）知，$g(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}=\frac{1}{\ln(1-x)}+\frac{1}{x}$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

要证 $g(x)<1$，即证 $\frac{1}{\ln(1-x)}+\frac{1}{x}<1$，即证 $\frac{1}{\ln(1-x)}<1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

（ⅰ）当 $x\in(0,1)$ 时，$\frac{1}{\ln(1-x)}<0$，$\frac{x-1}{x}<0$，即证 $\ln(1-x)>\frac{x}{x-1}$. 令 $F(x)=\ln(1-x)-\frac{x}{x-1}$，因为 $F'(x)=\frac{-1}{1-x}-\frac{-1}{(x-1)^2}=\frac{x}{(x-1)^2}>0$，所以 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内为增函数，所以 $F(x)>F(0)=0$.

（ⅱ）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\frac{1}{\ln(1-x)}>0$，$\frac{x-1}{x}>0$，即证 $\ln(1-x)>\frac{x}{x-1}$，由（ⅰ）分析知 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数，所以 $F(x)>F(0)=0$.

综合（ⅰ）（ⅱ）有 $g(x)<1$.

21. （1）$p=2$；（2）$20\sqrt{5}$.

（二）选考题

22.（1）$\begin{cases} x=2+\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）;

（2）$\rho\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. （1）$(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$.（2）$\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.