

普通高中教科书

数学

必修

第一册

人民教育出版社 课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心

人民教育出版社

·北京·

A 版

主 编:章建跃 李增沪

副主编:李 勇 李海东 李龙才

本册主编:李海东 郭玉峰

编写人员:王 嵘 白 涛 刘长明 刘春艳 李柏青 宋莉莉 张劲松
周远方 赵 昕 胡永建 俞求是 郭玉峰 郭慧清 黄炳锋
章建跃 薛红霞

责任编辑:王 嵘

美术编辑:王俊宏

普通高中教科书 数学 必修 第一册

人民教育出版社 课程教材研究所

编著

中学数学课程教材研究开发中心

出 版 人人和承识社

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编:100081)

网址<http://www.pep.com.cn>

重 印 山东出版传媒股份有限公司

发 行 山东新华书店集团有限公司

印 刷 山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司

版 次 2019年6月第1版

印 次 2022年1月山东第4次印刷

开 本 890毫米×1240毫米 1/16

印 张 16.75

字 数 374千字

书 号 ISBN 978-7-107-33565-5

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或本产品任何部分·违者必究

如发现内容质量问题,请登录中小学教材意见反馈平台: icjfk.pep.com.cn

山东出版传媒股份有限公司教材中心售后服务电话: 0531-82098188

主编寄语

亲爱的同学，欢迎使用这套教科书，希望它能成为你学习数学的好帮手。在开始学习前，我们想就数学学习中的一些问题与你做点交流。

首先，你想过为什么要学那么多数学吗？高中生应该认真思考这个问题了。其实道理很明显，就是因为数学有用。数学不仅对社会发展和科技进步作用巨大，而且对你个人的发展也很重要。努力学好数学对你的人生幸福意义重大，这个道理在你今后学习、工作和生活中会逐步体会到。

第二，要采用多样化学习方式。高中数学内容的抽象程度提高了，要以更加积极主动的态度、刻苦钻研的精神，采取阅读自学、独立思考、实践探究、合作交流等多种学习方式，才能更好地掌握它。内容越抽象，就越需要静下心来，持之以恒地思考，然后才能有所领悟、有所收获。

第三，注重基础，拾阶而上。数学的特点是逻辑严谨，从概念到性质再到应用环环相扣，前面知识未理解，后续学习就必然会遇上实质性困难。学数学，既没有捷径，也没有灵丹妙药，唯有按数学的方式，按部就班地学，循序渐进地想，在基础知识上下足功夫，才能取得好成效。

第四，按学习规律办事。理解概念、熟练技能和准确表达是数学学习的“三要素”，做好这些的要诀是遵循学习规律，掌握学习节奏。概念是数学的精要所在，必须深刻理解、牢固掌握，因此概念学习要“慢慢来”。例如，函数是贯穿高中数学的一条主线，是重中之重的内容，因为其抽象程度高而成为许多同学的学习难点。在起始阶段囫圇吞枣、贪多求快，就会给后续学习埋下隐患。学好它的秘诀在于慢，慢下来，仔细阅读教科书，用心揣摩每句话，搞懂每个例题，在探究、质疑、反思中逐渐领悟函数的概念及其蕴含的数学思想和方法，并用简明扼要的语言概括出来，从而实现认识的升华。这个过程，貌似慢而实为快，在反复推敲中悟出学习窍门，达到举一反三、触类旁通的效果，进而一通百通，由慢转快。这样的快是真快，是无后顾之忧的快，是充满智慧的快。

第五，重视严格的数学训练，独立完成作业。做作业的目的是：加深理解知识，熟练基本技能；学会思考，培养数学能力；查漏补缺，培养良好的学习习惯。本套书中的习题是精心挑选的，看似不难但寓意深刻，要高度重视。完成作业，独立思考最重要，遇到困难不能轻言放弃，有含金量的数学题往往要绞尽脑汁，一时做不出很正常，如果浅尝辄止，急于“刷题”看答案，这是自欺欺人，受害的是你自己。

最后，学习贵在创新。理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法都是必备基础，还要善于发现和提出问题，“凡事问个为什么”，这样才能学会学习。在这套教科书中，我们注重在提问方面做出示范，期望你能“看过问题三百个，不会解题也会问”。

学数学趁年轻，高中阶段是接受数学训练、打好数学基础的最佳时期，这个时期下功夫学数学，将使你终生受益。期盼这套教科书能给你带来愉快，使你的数学素养得到大幅提升。

本册导引

本书根据《普通高中数学课程标准(2017年版)》编写,包括“集合与常用逻辑用语”“一元二次函数、方程和不等式”“函数的概念与性质”“指数函数与对数函数”“三角函数”五章内容和“数学建模——建立函数模型解决实际问题”.

集合是刻画一类事物的语言和工具,是现代数学的基础;常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分,是数学表达和交流的工具.在“集合与常用逻辑用语”的学习中,同学们将学习集合的概念、基本关系和运算,学习用集合语言刻画一类事物的方法;并学习用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理,为高中数学学习做准备.

相等关系和不等式关系是数学中最基本的数量关系.在“一元二次函数、方程和不等式”的学习中,同学们将类比等式学习不等式.通过梳理初中数学的相关内容,理解一元二次函数、一元二次方程和一元二次不等式之间的联系,从函数观点认识方程与不等式,感悟数学知识之间的关联,完成初高中数学学习的过渡.

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型,它的思想方法贯穿了高中数学课程的始终.在“函数的概念与性质”中,同学们将在初中的基础上,进一步学习运用集合与对应的语言刻画函数概念,学习函数的基本性质,并通过幂函数的学习感受如何研究一个函数,如研究的内容、思路和方法,进一步感受函数的思想方法和广泛应用.

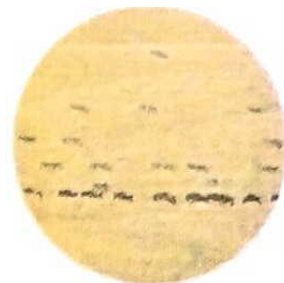
“指数爆炸”“对数增长”是生活中常见的变化现象.在“指数函数与对数函数”中,同学们将类比幂函数的研究方法,学习指数函数与对数函数的概念、图象和性质.通过对几类基本初等函数的变化差异的比较,体会如何根据变化差异选择合适的函数类型构建数学模型,刻画现实问题的变化规律,解决简单的实际问题.

三角函数也是一类基本的、重要的函数,它是刻画现实世界中具有周期性变化现象的数学模型.在“三角函数”的学习中,同学们将学习借助单位圆建立一般三角函数的概念,学习三角函数的图象和性质,探索和研究三角函数之间的一些恒等关系.通过建立三角函数模型刻画周期变化现象,进一步体会函数的广泛应用.

祝愿同学们通过本册书的学习,不但学到更多的数学知识,而且在数学能力、数学核心素养等方面都有较大的提高,并培养起更高的数学学习兴趣,形成对数学的更加全面的认识.

目录

第一章 集合与常用逻辑用语	1
1.1 集合的概念	2
1.2 集合间的基本关系	7
1.3 集合的基本运算	10
阅读与思考 集合中元素的个数	15
1.4 充分条件与必要条件	17
阅读与思考 几何命题与充分条件、必要条件	24
1.5 全称量词与存在量词	26
小结	33



第二章 一元二次函数、方程和不等式	36
2.1 等式性质与不等式性质	37
2.2 基本不等式	44
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式	50
小结	56
复习参考题2	57
复习参考题1	34



第三章 函数的概念与性质	59
3.1 函数的概念及其表示	60
阅读与思考 函数概念的发展历程	75
3.2 函数的基本性质	76
信息技术应用 用计算机绘制函数图象	87
3.3 幂函数	89
3.4 函数的应用(一)	93
探究与发现 探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质	92
文献阅读与数学写作* 函数的形成与发展	97
小结	99
复习参考题3	100



第四章 指数函数与对数函数	103
4.1 指数	104
4.2 指数函数	111

阅读与思考 放射性物质的衰减·····	115
信息技术应用 探究指数函数的性质·····	120
4.3 对数·····	122
阅读与思考 对数的发明·····	128
4.4 对数函数·····	130
探究与发现 互为反函数的两个函数图象间的关系·····	135
4.5 函数的应用(二)·····	142
阅读与思考 中外历史上的方程求解·····	147
文献阅读与数学写作* 对数概念的形成与发展·····	157
小结·····	158
复习参考题4·····	159
数学建模 建立函数模型解决实际问题·····	162
第五章 三角函数·····	167
5.1 任意角和弧度制·····	168
5.2 三角函数的概念·····	177
阅读与思考 三角学与天文学·····	186
5.3 诱导公式·····	188
5.4 三角函数的图象与性质·····	196
探究与发现 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 及 函数 $y=A\cos(\omega x+\phi)$ 的周期·····	203
探究与发现 利用单位圆的性质研究正弦函数、 余弦函数的性质·····	208
5.5 三角恒等变换·····	215
信息技术应用 利用信息技术制作三角函数表·····	224
5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ ·····	231
5.7 三角函数的应用·····	242
阅读与思考 振幅、周期、频率、相位·····	250
小结·····	251
复习参考题5·····	253
部分中英文词汇索引·····	258

第一章

集合与常用逻辑用语

我们知道，方程 $x^2 = 2$ 在有理数范围内无解，但在实数范围内有解.在平面内，所有到定点的距离等于定长的点组成一个圆；而在空间中，所有到定点的距离等于定长的点组成一个球面.因此，明确研究对象、确定研究范围是研究数学问题的基础，为了简洁、准确地表述数学对象及研究范围，我们需要使用集合的语言和工具，事实上，集合的知识是现代数学的基础，也是高中数学的基础，在后面各章的学习中将越来越多地应用它.在本章，我们将学习集合的概念、基本关系和运算，学习用集合语言刻画一类事物的方法.

逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具.学习一些常用逻辑用语，可以使我们正确理解数学概念、合理论证数学结论、准确表达数学内容.逻辑用语也是日常交往、学习和工作中必不可少的工具，正确使用逻辑用语是每一位公民应具备的基本素养.本章我们将通过常用逻辑用语的学习，理解使用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理的方法，体会逻辑用语在表述数学内容和论证数学结论中的作用，学会使用集合和逻辑语言表达和交流数学问题，提升交流的逻辑性和准确性.

1.1 集合的概念

在小学和初中，我们已经接触过一些集合.例如，自然数的集合，同一平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合(即圆)等.为了更有效地使用集合语言，我们需要进一步了解集合的有关知识.下面先从集合的含义开始.

看下面的例子：

- (1) $1\sim 10$ 之间的所有偶数；
- (2) 立德中学今年入学的全体高一学生；
- (3) 所有的正方形；
- (4) 到直线 l 的距离等于定长 d 的所有点；
- (5) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有实数根；
- (6) 地球上的四大洋.

例(1)中，我们把 $1\sim 10$ 之间的每一个偶数作为元素，这些元素的全体就是一个集合；同样地，例(2)中，把立德中学今年入学的每一位高一学生作为元素，这些元素的全体也是一个集合.

思考

上面的例 (3) 到例(6) 也都能组成集合吗？它们的元素分别是什么？

一般地，我们把研究对象统称为元素(*element*)，把一些元素组成的总体叫做集合(*set*)(简称为集).

给定的集合，它的元素必须是确定的.也就是说，给定一个集合，那么一个元素在或不在这个集合中就确定了.例如，“ $1\sim 10$ 之间的所有偶数”构成一个集合， $2, 4, 6, 8, 10$ 是这个集合的元素， $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ 不是它的元素；“较小的数”不能构成集合，因为组成它的元素是不确定的.

一个给定集合中的元素是互不相同的.也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

我们通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于(*belong to*)集合 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于(*not belong to*)集合 A ,记作 $a \notin A$.

例如,若用 A 表示前面例(1) 中“1~10之间的所有偶数”组成的集合,则有 $4 \in A, 3 \notin A$,等等.

数学中一些常用的数集及其记法
全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 N :
全体正整数组成的集合称为正整数集,记作 N^* 或 N_+ ;
全体整数组成的集合称为整数集,记作 Z ;
全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 Q :
全体实数组成的集合称为实数集,记作 R .

从上面的例子看到,我们可以用自然语言描述一个集合,除此之外,还可以用什么方式表示集合呢?

列举法

“地球上的四大洋”组成的集合可以表示为 {太平洋, 大西洋, 印度洋, 北冰洋}; “方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有实数根”组成的集合可以表示为{1, 2}.

像这样把集合的所有元素一一列举出来,并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法叫做列举法.

例1 用列举法表示下列集合:

(1)小于10的所有自然数组成的集合;

(2)方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合.

解: (1)设小于10的所有自然数组成的集合为 A , 那么

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

(2)设方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合为 B , 那么

$$B = \{0, 1\}.$$

由于元素完全相同的两个集合相等,而与列举的顺序无关,因此一个集合可以有不同的列举方法.例如,例1(1)的集合还可以写成

$$A = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$$

等.

思考

(1)你能用自然语言描述集合 $\{0, 3, 6, 9\}$ 吗?

(2)你能用列举法表示不等式 $x - 7 < 3$ 的解集吗?

描述法

不等式 $x - 7 < 3$ 的解是 $x < 10$, 因为满足 $x < 10$ 的实数有无数个, 所以 $x - 7 < 3$ 的解集无法用列举法表示. 但是, 我们可以利用解集中元素的共同特征, 即: x 是实数, 且 $x < 10$, 把解集表示为

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}.$$

又如, 整数集 $\mathbb{Z}$ 可以分为奇数集和偶数集. 对于每一个 $x \in \mathbb{Z}$, 如果它能表示为 $x = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ 的形式, 那么 x 除以 2 的余数为 1, 它是一个奇数; 反之, 如果 x 是一个奇数, 那么 x 除以 2 的余数为 1, 它能表示为 $x = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ 的形式. 所以, $x = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ 是所有奇数的一个共同特征, 于是奇数集可以表示为

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}.$$

一般地, 设 A 是一个集合, 我们把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为

$$\{x \in A \mid P(x)\},$$

这种表示集合的方法称为描述法.

例如, 实数集 $\mathbb{R}$ 中, 有限小数和无限循环小数都具有 $\frac{q}{p}$

($p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$) 的形式, 这些数组成有理数集, 我们将它表示为

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}.$$

其中, $x = \frac{q}{p} (p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0)$ 就是所有有理数具有的共同特征.

显然, 对于任何 $y \in \{x \in A \mid P(x)\}$, 都有 $y \in A$, 且 $P(y)$ 成立.

你能用这样的方法表示偶数集吗?

有时也用冒号或分号代替竖线, 写成

$$\{x \in A : P(x)\}$$

或

$$\{x \in A ; P(x)\}.$$

例2 试分别用描述法和列举法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2 - 2 = 0$ 的所有实数根组成的集合 A ;

(2) 由大于 10 且小于 20 的所有整数组成的集合 B .

解: (1) 设 $x \in A$, 则 x 是一个实数, 且 $x^2 - 2 = 0$. 因此, 用描述法表示为

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}.$$

方程 $x^2 - 2 = 0$ 有两个实数根 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, 因此, 用列举法表示为

$$A = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

(3) 设 $x \in B$, 则 x 是一个整数, 即 $x \in \mathbb{Z}$, 且 $10 < x < 20$. 因此, 用描述法表示为

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < x < 20\}.$$

大于 10 且小于 20 的整数有 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 因此, 用列举法表示为

$$B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}.$$

我们约定,如果从上下文的关系看, $x \in R$, $x \in Z$ 是明确的,那么 $x \in R$, $x \in Z$ 可以省略,只写其元素 x .例如,集合 $D = \{x \in R | x < 10\}$ 也可表示为 $D = \{x | x < 10\}$;集合 $E = \{x \in Z | x = 2k + 1, k \in Z\}$ 也可表示为 $E = \{x | x = 2k + 1, k \in Z\}$.

思考

举例说明,用自然语言、列举法和描述法表示集合时各自的特点.

练习

1.判断下列元素的全体是否组成集合,并说明理由:

(1) A, B 是平面 a 内的定点,在平面 a 内与 A, B 等距离的点;

(2)高中学生中的游泳能手.

2.用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

0 _____ N ; -3 _____ N ; 0.5 _____ Z ; $\sqrt{2}$ _____ Z ; $\frac{1}{3}$ _____ Q ; π _____ R .

3.用适当的方法表示下列集合:

(1)由方程 $x^2 - 9 = 0$ 的所有实数根组成的集合;

(2)一次函数 $y = x + 3$ 与 $y = -2x + 6$ 图象的交点组成的集合;

(3)不等式 $4x - 5 < 3$ 的解集.

习题1.1



复习巩固

1.用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

(1)设 A 为所有亚洲国家组成的集合,则

中国 _____ A , 美国 _____ A , 印度 _____ A , 英国 _____ A ;

(2)若 $A = \{x | x^2 = x\}$, 则 -1 _____ A ;

(3)若 $B = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$ 则 3 _____ B ;

(4)若 $C = \{x \in N | 1 \leq x \leq 10\}$, 则 8 _____ C , 9.1 _____ C .

2.用列举法表示下列集合:

(1)大于1且小于6的整数;

(2) $A = \{x | (x - 1)(x + 2) = 0\}$;

(3) $B = \{x \in Z | -3 < 2x - 1 < 3\}$.



3.把下列集合用另一种方法表示出来:

(1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$;

(2) 由1, 2, 3这三个数字抽出一部分或全部数字(没有重复)所组成的一切自然数;

(3) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$;

(4) 中国古代四大发明.

4.用适当的方法表示下列集合:

(1)二次函数 $y = x^2 - 4$ 的函数值组成的集合;

(2)反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的自变量的取值组成的集合;

(3)不等式 $3x \geq 4 - 2x$ 的解集.

拓广探索

5.集合论是德国数学家康托尔于19世纪末创立的.当时,康托尔在解决涉及无限量研究的数学问题时,越过“数集”限制,提出了一般性的“集合”概念.关于集合论,希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人的产物,在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”,罗素描述其为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”.请你查阅相关资料,用简短的报告阐述你对这些评价的认识.



康托尔(Georg Cantor,
1845—1918)

1.2 集合间的基本关系

我们知道，两个实数之间有相等关系、大小关系，如 $5=5$, $5<7$, $5>3$ ，等等.两个集合之间是否也有类似的关系呢？

观察

观察下面几个例子，类比实数之间的相等关系、大小关系，你能发现下面两个集合之间的关系吗？

$$(1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

(2) C 为立德中学高一 (2) 班全体女生组成的集合， D 为这个班全体学生组成的集合；

$$(3) E = \{x | x \text{ 是有两条边相等的三角形}\}, F = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}.$$

可以发现，在(1)中，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素.这时我们说集合 A 包含于集合 B ，或集合 B 包含集合 A .(2)中的集合 C 与集合 D 也有这种关系.

一般地，对于两个集合 A , B ，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A 为集合 B 的子集(subset)，记作

$$A \subseteq B (\text{或 } B \supseteq A),$$

读作“ A 包含于 B ”(或“ B 包含 A ”).

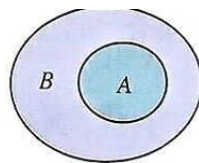


图1.2-1

在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为Venn图.这样，上述集合 A 与集合 B 的包含关系，可以用图1.2-1表示.

请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例

在(3)中，由于“两条边相等的三角形”是等腰三角形，因此，集合 E , F 都是由所有等腰三角形组成的集合.即集合 E 中任何一个元素都是集合 F 中的元素，同时，集合 F 中任何一个元素也都是集合 E 中的元素.这样，集合 E 的元素与集合 F 的元素是一样的.

一般地，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

也就是说,若 $A=B$, 且 $B=A$, 则 $A=B$.

与实数中的结论“若 $a \geq b$, 且 $b \geq a$, 则 $a=b$ ”相类比，你有什么体会？

如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$, 就称集合 A 是集合 B 的真子集(*proper subset*), 记作

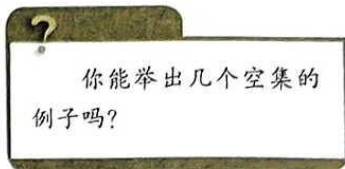
$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A \text{)}.$$

读作“ A 真包含于 B ” (或“ B 真包含 A ”).

例如, 在 (1) 中, $A \subseteq B$, 但 $4 \in B$, 且 $4 \notin A$, 所以集合 A 是集合 B 的真子集.

我们知道, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 没有实数根, 所以方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数根组成的集合中没有元素.

一般地, 我们把不含任何元素的集合叫做空集(*empty set*), 记为 $\emptyset$, 并规定: 空集是任何集合的子集.



思考

包含关系 $\{a\} \subseteq A$ 与属于关系 $a \in A$ 有什么区别? 试结合实例作出解释.

由上述集合之间的基本关系, 可以得到下列结论:

(1) 任何一个集合是它本身的子集, 即

$$A \subseteq A;$$

(2) 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$.

例1 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有子集, 并指出哪些是它的真子集.

解: 集合 $\{a, b\}$ 的所有子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. 真子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}$.

例2 判断下列各题中集合 A 是否为集合 B 的子集, 并说明理由:

(1) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x | x \text{ 是 } 8 \text{ 的约数}\};$

(2) $A = \{x | x \text{ 是长方形}\}, B = \{x | x \text{ 是两条对角线相等的平行四边形}\}.$

解: (1) 因为 3 不是 8 的约数, 所以集合 A 不是集合 B 的子集.

(2) 因为若 x 是长方形, 则 x 一定是两条对角线相等的平行四边形, 所以集合 A 是集合 B 的子集.

练习

1. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

2. 用适当的符号填空:

(1) a _____ $\{a, b, c\}$;

(2) 0 _____ $\{x | x^2 = 0\};$

(3) $\emptyset$ _____ $\{x \in R | x^2 + 1 = 0\};$

(4) $\{0, 1\}$ _____ $N;$

(5) $\{0\}$ _____ $\{x | x^2 = x\};$

(6) $\{2, 1\}$ _____ $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}.$

3. 判断下列两个集合之间的关系:

(1) $A = \{x | x < 0\}, B = \{x | x < 1\};$

(2) $A = \{x | x = 3k, k \in N\}, B = \{x | x = 6z, z \in N\};$

$A = \{x \in N_+ | x \text{ 是 } 4 \text{ 与 } 10 \text{ 的公倍数}\}.$

$B = \{x | x = 20m, m \in N_+\}.$

习题 1.2



复习巩固

1. 选用适当的符号填空:

(1) 若集合 $A = \{x | 2x - 3 < 3x\}, B = \{x | x \geq 2\}$, 则

$-4 \underline{\hspace{1cm}} B, -3 \underline{\hspace{1cm}} A, \{2\} \underline{\hspace{1cm}} B, B \underline{\hspace{1cm}} A;$

(2) 若集合 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, 则

$1 \underline{\hspace{1cm}} A, \{-1\} \underline{\hspace{1cm}} A, \emptyset \underline{\hspace{1cm}} A, \{1, -1\} \underline{\hspace{1cm}} A;$

(3) $\{x | x \text{ 是菱形}\} \underline{\hspace{1cm}} \{x | x \text{ 是平行四边形}\};$

$\{x | x \text{ 是等腰三角形}\} \underline{\hspace{1cm}} \{x | x \text{ 是等边三角形}\}.$

2. 指出下列各集合之间的关系, 并用 Venn 图表示:

$A = \{x | x \text{ 是四边形}\},$

$B = \{x | x \text{ 是平行四边形}\},$

$C = \{x | x \text{ 是矩形}\}, D = \{x | x \text{ 是正方形}\}.$



综合运用

3. 举出下列各集合的一个子集:

(1) $A = \{x | x \text{ 是立德中学的学生}\};$

(2) $B = \{x | x \text{ 是三角形}\};$

(3) $C = \{0\};$

(4) $D = \{x \in Z | 3 < x < 30\}$

4. 在平面直角坐标系中, 集合 $C = \{(x, y) | y = x\}$ 表示直线 $y = x$, 从这个角度看, 集合 $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases} \right\}$ 表示什么? 集合

C, D 之间有什么关系?

拓展探索

5. (1) 设 $a, b \in R, P = \{1, a\}, Q = \{-1, -b\}$, 若 $P = Q$, 求 $a - b$ 的值;

(2) 已知集合 $A = \{x | 0 < x < a\}, B = \{x | 1 < x < 2\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

1.3 集合的基本运算

我们知道,实数有加、减、乘、除等运算.集合是否也有类似的运算呢?

并集

观察

观察下面的集合,类比实数的加法运算,你能说出集合 C 与集合 A, B 之间的关系吗?

(1) $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$

(2) $A = \{x | x \text{ 是有理数}\}, B = \{x | x \text{ 是无理数}\}, C = \{x | x \text{ 是实数}\}.$

在上述两个问题中,集合 A, B 与集合 C 之间都具有这样一种关系:集合 C 是由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的.

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集(union set),记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”),即

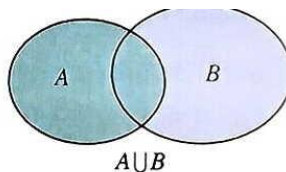


图 1.3-1

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

图 1.3-1

可用Venn图(图1.3-1)表示.

这样,在问题(1) (2) 中,集合 A 与 B 的并集是 C ,即

$$A \cup B = C.$$

例 1 设 $A = \{4, 5, 6, 8\}, B = \{3, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cup B$.

解: $A \cup B = \{4, 5, 6, 8\} \cup \{3, 5, 7, 8\}$

$$= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

例2 设集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$,集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$,
求 $A \cup B$.

解: $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | 1 < x < 3\}$

$$= \{x | -1 < x < 3\}.$$

如图 1.3-2,还可以利用数轴直观表示例2中求并集

在求两个集合的并集时,它们的公共元素在并集中只能出现一次.如元素5,8.

$A \cup B$ 的过程.

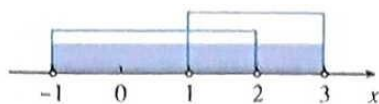


图 1.3-2

思考

下列关系式成立吗?

(1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \emptyset = A$

交集

思考

观察下面的集合, 集合 A , B 与集合 C 之间有什么关系?

(1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 5, 8, 12\}$, $C = \{8\}$;

(2) $A = \{x | x \text{ 是立德中学今年在校的女同学}\}$, $B = \{x | x \text{ 是立德中学今年在校的高一年级同学}\}$, $C = \{x | x \text{ 是立德中学今年在校的高一年级女同学}\}$.

在上述两个问题中, 集合 C 是由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的.

一般地, 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集 (intersection set), 记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\},$$

可用 Venn 图 (图 1.3-3) 表示.

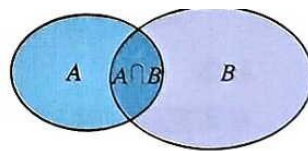


图 1.3-3

这样, 在上述问题 (1) (2) 中, $A \cap B = C$.

例 3 立德中学开运动会, 设

$A = \{x | x \text{ 是立德中学高一年级参加百米赛跑的同学}\}$,

$B = \{x | x \text{ 是立德中学高一年级参加跳高比赛的同学}\}$,

求 $A \cap B$.

解: $A \cap B$ 就是立德中学高一年级中那些既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学组成的集合. 所以,

$$A \cap B = \{x | x \text{ 是立德中学高一年级既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学}\}.$$

例4 设平面内直线 l_1 上点的集合为 L_1 , 直线 l_2 上点的集合为 L_2 , 试用集合的运算表示 l_1, l_2 的位置关系.

解: 平面内直线 l_1, l_2 可能有三种位置关系, 即相交于一点、平行或重合.

(1) 直线 l_1, l_2 相交于一点 P 可表示为

$$L_1 \cap L_2 = \{\text{点} P\};$$

(2) 直线 l_1, l_2 平行可表示为

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset;$$

(3) 直线 l_1, l_2 重合可表示为

$$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2,$$

思考

下列关系式成立吗?

(1) $A \cap A = A$; (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

练习

1. 设 $A = \{3, 5, 6, 8\}, B = \{4, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.
2. 设 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 = 0\}, B = \{x | x^2 = 1\}$, 求 $A \cup B, A \cap B$.
3. 设 $A = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}, B = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.
4. 设 $A = \{x | x \text{ 是幸福农场的汽车}\}, B = \{x | x \text{ 是幸福农场的拖拉机}\}$, 求 $A \cup B$.

补集

在研究问题时, 我们经常需要确定研究对象的范围.

例如, 从小学到初中, 数的研究范围逐步地由自然数到正分数, 再到有理数, 引进无理数后, 数的研究范围扩充到实数. 在高中阶段, 数的研究范围将进一步扩充.

在不同范围研究同一个问题, 可能有不同的结果. 例如方程

$(x-2)(x^2-3)=0$ 的解集, 在有理数范围内只有一个解 **2**, 即

$$\{x \in \mathbb{Q} | (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2\};$$

在实数范围内有三个解: **2, $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$** , 即

$$\{x \in \mathbb{R} | (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}.$$

一般地, 如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素, 那么就称这个集合为全集(universe set), 通常记作 U .

通常也把给定的集合作为全集

对于一个集合 A ,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集(complementary set),简称为集合 A 的补集,记作 $C_U A$,即

$$C_U A = \{x | x \in U, \text{且} x \notin A\},$$

可用Venn图(图1.3-4)表示.

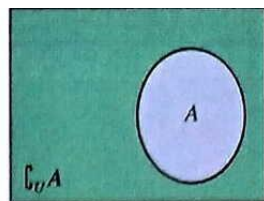


图1.3-4

例5 设 $U = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 求 $C_U A$, $C_U B$.

解: 根据题意可知, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以

$$C_U A = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$C_U B = \{1, 2, 7, 8\}.$$

例6 设全集 $U = \{x | x \text{ 是三角形}\}$, $A = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $C_U(A \cup B)$.

解: 根据三角形的分类可知

$$A \cap B = \emptyset,$$

$$A \cup B = \{x | x \text{ 是锐角三角形或钝角三角形}\},$$

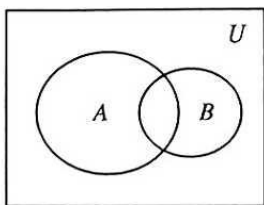
$$C_U(A \cup B) = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}.$$

练习

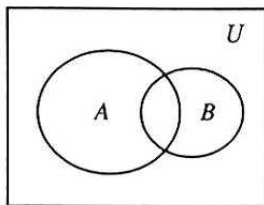
- 已知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, 求 $A \cap (C_U B)$, $(C_U A) \cap (C_U B)$.
- 设 $S = \{x | x \text{ 是平行四边形或梯形}\}$, $A = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是菱形}\}$, $C = \{x | x \text{ 是矩形}\}$, 求 $B \cap C$, $C_S B$, $C_S A$.
- 图中 U 是全集, A , B 是 U 的两个子集, 用阴影表示:

$$(1) (C_U A) \cap (C_U B);$$

$$(2) (C_U A) \cup (C_U B).$$



(1)



(2)

(第3题)



复习巩固

1. 集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 求 $A \cup B, A \cap B$.
2. 设 $A = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$. 求 $A \cap B, A \cap C, A \cap (B \cup C), A \cap (B \cap C)$.
3. 学校开运动会, 设 $A = \{x | x \text{ 是参加 } 100\text{m} \text{ 跑的同学}\}$, $B = \{x | x \text{ 是参加 } 200\text{m} \text{ 跑的同学}\}$, $C = \{x | x \text{ 是参加 } 400\text{m} \text{ 跑的同学}\}$, 学校规定, 每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项比赛, 请你用集合的运算说明这项规定, 并解释以下集合运算的含义:

(1) $A \cup B$;

(2) $A \cap C$.



综合运用

4. 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$, 求 $C_R(A \cup B), C_R(A \cap B), (C_R A) \cap B, A \cup (C_R B)$.
5. 设集合 $A = \{x | (x - 3)(x - a) = 0, a \in R\}$, $B = \{x | (x - 4)(x - 1) = 0\}$, 求 $A \cup B, A \cap B$.

拓广探索

6. 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in N | 0 \leq x \leq 10\}$, $A \cap (C_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$, 试求集合 B .

在研究集合时,经常遇到有关集合中元素的个数问题.我们把含有限个元素的集合 A 叫做有限集,用 $\text{card}(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数.例如, $A=\{a,b,c\}$,则 $\text{card}(A)=3$.

card 是英文 cardinal (基数)的缩写

看一个问题.某超市进了两次货,第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共6种,第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共4种,两次一共进了几种货?

回答两次一共进了 $10(=6+4)$ 种,显然是不对的.让我们试着从集合的角度考虑这个问题.

用集合 A 表示第一次进货的品种,用集合 B 表示第二次进货的品种,就有 $A=\{\text{圆珠笔, 钢笔, 橡皮, 笔记本, 方便面, 汽水}\}$,

$B=\{\text{圆珠笔, 铅笔, 火腿肠, 方便面}\}$.

这里 $\text{card}(A)=6$, $\text{card}(B)=4$.求两次一共进了几种货,这个问题指的是求 $\text{card}(A \cup B)$.这个例子中,两次进的货里有相同的品种,相同的品种数实际就是 $\text{card}(A \cap B)$. $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(A \cup B)$, $\text{card}(A \cap B)$ 之间有什么关系呢?

可以算出

$$\text{card}(A \cup B)=8,$$

$$\text{card}(A \cap B)=2.$$

一般地,对任意两个有限集合 A , B ,有

$$\text{card}(A \cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A \cap B).$$

再来看一个问题.学校先举办了一次田径运动会,某班有8名同学参赛,又举办了一次球类运动会,这个班有12名同学参赛,两次运动会都参赛的有3人.两次运动会中,这个班共有多少名同学参赛?

用集合 A 表示田径运动会参赛的学生,用集合 B 表示球类运动会参赛的学生,就有

$$A=\{x \mid x \text{ 是田径运动会参赛的学生}\},$$

$$B=\{x \mid x \text{ 是球类运动会参赛的学生}\},$$

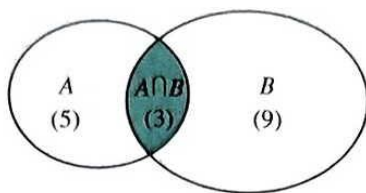
那么

$$A \cap B=\{x \mid x \text{ 是两次运动会都参赛的学生}\},$$

$$A \cup B=\{x \mid x \text{ 是所有参赛的学生}\},$$

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \\ &= 8 + 12 - 3 = 17 \end{aligned}$$

所以,在两次运动会中,这个班共有17名同学参赛.我们也可以用Venn图来求解.



在上图中相应于 $A \cap B$ 的区域里先填上3^①

($\text{card}(A \cap B) = 3$),再在A中不包括 $A \cap B$ 的区域

里填上 5($\text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) = 5$),在B中不包

$A \cap B$ 的区域里填上 9($\text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 9$).

最后把这三个数加起来得17,这就是 $\text{card}(A \cup B)$.

①这里的 3 是表示元素的个数,而不是元素,图中我们特别加上括号,另外两个数 5, 9 也一样

这种图解法对于解比较复杂的问题(例如涉及三个以上集合的并、交的问题)更能显示出它的优越性.对于有限集合A, B, C, 你能发现 $\text{card}(A \cup B \cup C)$, $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(C)$, $\text{card}(A \cap B)$, $\text{card}(B \cap C)$, $\text{card}(A \cap C)$, $\text{card}(A \cap B \cap C)$ 之间的关系吗?通过一个具体的例子,算一算.

有限集合中元素的个数,我们可以一一数出来.而对于元素个数无限的集合,如

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\},$$

我们无法数出集合中元素的个数,但可以比较这两个集合中元素个数的多少.你能设计一种比较这两个集合中元素个数多少的方法吗?

1.4 充分条件与必要条件

在初中，我们已经对命题有了初步的认识，一般地，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题.判断为真的语句是真命题，判断为假的语句是假命题.中学数学中的许多命题可以写成“若 p ，则 q ”“如果 p ，那么 q ”等形式，其中 p 称为命题的条件， q 称为命题的结论.本节主要讨论这种形式的命题.下面我们将进一步考察“若 p ，则 q ”形式的命题中 p 和 q 的关系，学习数学中的三个常用的逻辑用语——充分条件、必要条件和充要条件.

1.4.1 充分条件与必要条件

思考

下列“若 p ，则 q ”形式的命题中，哪些是真命题?哪些是假命题?

(1)若平行四边形的对角线互相垂直，则这个平行四边形是菱形;

(2)若两个三角形的周长相等，则这两个三角形全等;

(3)若 $x^2-4x+3=0$ ，则 $x=1$;

(4)若平面内两条直线 a 和 b 均垂直于直线 l ，则 $a \parallel b$.

在命题(1)(4)中，由条件 p 通过推理可以得出结论 q ,

所以它们是真命题.在命题(2)(3)中，由条件 p 不能得出结论 q ，所以它们是假命题.

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q .这时，我们就说，由 p 可以推出 q ，记作

$$p \Rightarrow q,$$

并且说, p 是 q 的充分条件(sufficient condition), q 是 p 的必要条^①(necessary condition).

如果“若 p ，则 q ”为假命题，那么由条件 p 不能推出结论 q ，记作 $p \nRightarrow q$ ，此时，我们就说 p 不是 q 的充分条件， q 不是 p 的必要条件.

上述命题(1)(4)中的 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必

①此时，如果 q 不成立，则 p 一定不成立.所以， q 对于 p 成立而言是必要的，请举例说明。

要条件, 而命题(2)(3) 中的 p 不是 q 的充分条件, q 不是 p 的必要条件.

例1 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中, 哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

(1)若四边形的两组对角分别相等, 则这个四边形是平行四边形;

(2)若两个三角形的三边成比例, 则这两个三角形相似;

(3)若四边形为菱形, 则这个四边形的对角线互相垂直;

(4)若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$;

(5)若 $a = b$, 则 $ac = bc$;

(6)若 x, y 为无理数, 则 xy 为无理数.

解: (1)这是一条平行四边形的判定定理, $p \Rightarrow q$, 所以 p 是 q 的充分条件.

(2)这是一条相似三角形的判定定理, $p \Rightarrow q$, 所以 p 是 q 的充分条件.

(3)这是一条菱形的性质定理, $p \Rightarrow q$, 所以 p 是 q 的充分条件.

(4) 由于 $(-1)^2 = 1$, 但 $-1 \neq 1$, $p \not\Rightarrow q$, 所以 p 不是 q 充分条件.

举反例是判断一个命题是假命题的重要方式

(5)由等式的性质知, $p \Rightarrow q$, 所以 p 是 q 的充分条件.

(6) $\sqrt{2}$ 为无理数, 但 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 为有理数, $p \not\Rightarrow q$, 所以 p 不是 q 的充分条件.

思考

例1中命题(1)给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件, 即“四边形的两组对角分别相等”.这样的充分条件唯一吗?如果不唯一, 那么你能再给出几个不同的充分条件吗?

我们说 p 是 q 的充分条件, 是指由条件 p 可以推出结论 q , 但这并不意味着只能由这个条件 p 才能推出结论 q .一般来说, 对给定结论 q , 使得 q 成立的条件 p 是不唯一的.例如, 我们知道, 下列命题均为真命题:

①若四边形的两组对边分别相等, 则这个四边形是平行四边形;

②若四边形的一组对边平行且相等, 则这个四边形是平行四边形;

③若四边形的两条对角线互相平分, 则这个四边形是平行四边形.

所以, “四边形的两组对边分别相等” “四边形的一组对边平行且相等” “四边形的两条对角线互相平分”都是“四边形是平行四边形”的充分条件.

事实上, 例1中命题(1)及上述命题①②③均是平行四边形的判定定理.所以, 平

行四边形的每一条判定定理都给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件,即这个条件能充分保证四边形是平行四边形.类似地,平行线的每一条判定定理都给出了“两直线平行”的一个充分条件,例如“内错角相等”这个条件就充分保证了“两条直线平行”.

一般地,数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.

例2 下列“若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 q 是 p 的必要条件?

(1)若四边形为平行四边形,则这个四边形的两组对角分别相等;

(2)若两个三角形相似,则这两个三角形的三边成比例;

(3)若四边形的对角线互相垂直,则这个四边形是菱形;

(4)若 $x=1$,则 $x^2=1$;

(5)若 $ac=bc$,则 $a=b$;

(6)若 xy 为无理数,则 x,y 为无理数.

解:(1)这是平行四边形的一条性质定理, $p \Rightarrow q$,所以, q 是 p 的必要条件.

(2)这是三角形相似的一条性质定理, $p \Rightarrow q$,所以, q 是 p 的必要条件.

(3)如图1.4-1,四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直,但它不是菱形, $p \nRightarrow q$,所以, q 不是 p 的必要条件.

(4)显然, $p \Rightarrow q$,所以, q 是 p 的必要条件.

(5)由于 $(-1) \times 0 = 1 \times 0$,但 $-1 \neq 1$, $p \nRightarrow q$,所以, q 不是 p 的必要条件.

(6) 由于 $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 为无理数,但 $1, \sqrt{2}$ 不全是无理数, $p \nRightarrow q$,所以, q 不是 p 的必要条件.

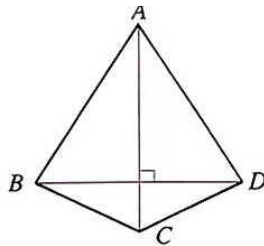


图1.4-1

一般地,要判断“若 p ,则 q ”形式的命题中 q 是否为 p 的必要条件,只需判断是否有“ $p \Rightarrow q$ ”,即“若 p ,则 q ”是否为真命题.

思考

例2中命题(1)给出了“四边形是平行四边形”的一个必要条件,即“这个四边形的两组对角分别相等”.这样的必要条件是唯一的吗?如果不唯一,你能给出“四边形是平行四边形”的几个其他必要条件吗?

我们说 q 是 p 的必要条件,是指以 p 为条件可以推出结论 q ,但这并不意味着由条件 p 只能推出结论 q .一般来说,给定条件 p ,由 p 可以推出的结论 q 是不唯一的.例如,下列命题都是真命题:

①若四边形是平行四边形,则这个四边形的两组对边分别相等;

②若四边形是平行四边形,则这个四边形的一组对边平行且相等;

③若四边形是平行四边形,则这个四边形的两条对角线互相平分.

这表明,“四边形的两组对边分别相等” “四边形的一组对边平行且相等” “四边形的两条对角线互相平分”都是“四边形是平行四边形”的必要条件.

我们知道,例2中命题(1)及上述命题①②③均为平行四边形的性质定理.所以,平行四边形的每条性质定理都给出了“四边形是平行四边形”的一个必要条件.类似地,平行线的每条性质定理都给出了“两直线平行”的一个必要条件,例如“同位角相等”是“两直线平行”的必要条件,也就是说,如果同位角不相等,那么就不可能有“两直线平行”.

一般地,数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

练习

1.下列“若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

(1)若平面内点 P 在线段 AB 的垂直平分线上,则 $PA=PB$;

(2)若两个三角形的两边及一边所对的角分别相等,则这两个三角形全等;

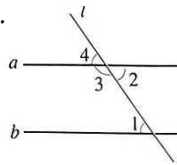
(3)若两个三角形相似,则这两个三角形的面积比等于周长比的平方.

2.下列“若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 q 是 p 的必要条件?

(1)若直线 l 与 $\odot O$ 有且仅有一个交点,则 l 为 $\odot O$ 的一条切线;

(2)若 x 是无理数,则 x^2 也是无理数.

3.如图,直线 a 与 b 被直线 l 所截,分别得到了 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 和 $\angle 4$.请根据这些信息,写出几个“ $a \parallel b$ ”的充分条件和必要条件.



(第3题)

1.4.2 充要条件

思考

下列 “若 p ,则 q ”形式的命题中,哪些命题与它们的逆命题都是真命题?

(1)若两个三角形的两角和其中一角所对的边分别相等,则这两个三角形全等;

(2)若两个三角形全等,则这两个三角形的周长相等;

(3)若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根,则 $ac < 0$;

(4)若 $A \cup B$ 是空集,则 A 与 B 均是空集.

不难发现,上述命题中的命题(1)(4)和它们的逆命题都是真命题;命题(2)是真命题,但它的逆命题是假命题;命题(3)是假命题,但它的逆命题是真命题.

如果“若 p ,则 q ”和它的逆命题“若 q ,则 p ”均是真命题,即既有 $p \Rightarrow q$,又有 $q \Rightarrow p$,就记作

$$p \Leftrightarrow q.$$

将命题“若 p ,则 q ”中的条件 p 和结论 q 互换,就得到一个新的命题“若 q ,则 p ”,称这个命题为原命题的逆命题

此时, p 既是 q 的充分条件, 也是 q 的必要条件, 我们说 p 是 q 的充分必要条件, 简称为充要条件(sufficient and necessary condition). 显然, 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件.

概括地说, 如果 $p \Rightarrow q$, 那么 p 与 q 互为充要条件. 上述命题(1)(4)中的 p 与 q 互为充要条件.

例3 下列各题中, 哪些 p 是 q 的充要条件?

(1) p : 四边形是正方形, q : 四边形的对角线互相垂直且平分;

(2) p : 两个三角形相似, q : 两个三角形三边成比例;

(3) p : $xy > 0$, q : $x > 0, y > 0$;

(4) p : $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, q : $a+b+c=0 (a \neq 0)$.

解: (1) 因为对角线互相垂直且平分的四边形不一定是正方形(为什么), 所以 $q \nRightarrow p$, 所以 p 不是 q 的充要条件.

(2) 因为“若 p , 则 q ”是相似三角形的性质定理, “若 q , 则 p ”是相似三角形的判定定理, 所以它们均为真命题, 即 $p \Leftrightarrow q$, 所以 p 是 q 的充要条件.

(3) 因为 $xy > 0$ 时, $x > 0, y > 0$ 不一定成立(为什么), 所以 $p \nRightarrow q$, 所以 p 不是 q 的充要条件.

(4) 因为“若 p , 则 q ”与“若 q , 则 p ”均为真命题, 即 $p \Leftrightarrow q$, 所以 p 是 q 的充要条件.

探究

通过上面的学习, 你能给出“四边形是平行四边形”的充要条件吗?

可以发现, “四边形的两组对角分别相等” “四边形的两组对边分别相等” “四边形的一组对边平行且相等”和“四边形的对角线互相平分”既是“四边形是平行四边形”的充分条件, 又是必要条件, 所以它们都是“四边形是平行四边形”的充要条件.

另外, 我们再看平行四边形的定义:

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形,

它表明“四边形的两组对边分别平行”也是“四边形是平行四边形”的一个充要条件.

上面的这些充要条件从不同角度刻画了“平行四边形”这个概念, 据此我们可以给出平行四边形的其他定义形式, 例如:

两组对边分别相等的四边形叫做平行四边形;

对角线互相平分的四边形叫做平行四边形.

类似地, 利用“两个三角形全等”的充要条件, 可以给出“三角形全等”的其他定义形式, 而且这些定义是相互等价的; 同样, 利用“两个三角形相似”的充要条件, 可以给出“相似三角形”其他定义形式, 这些定义也是相互等价的; 等等.

例4 已知: $\odot O$ 的半径为 r , 圆心 O 到直线 l 的距离为 d . 求证: $d = r$ 是直线 l 与 $\odot O$ 相切的充要条件.

分析: 设 $p: d = r, q: \text{直线 } l \text{ 与 } \odot O \text{ 相切}$, 要证 p 是 q 的充要条件, 只需分别证明充分性 ($p \Rightarrow q$) 和必要性 ($q \Rightarrow p$) 即可.

证明: 设 $p: d = r, q: \text{直线 } l \text{ 与 } \odot O \text{ 相切}$.

(1) 充分性 ($p \Rightarrow q$): 如图 1.4-2, 作 $OP \perp l$ 于点 P , 则 $OP = d$. 若 $d = r$, 则点 P 在 $\odot O$ 上. 在直线 l 上任取一点 Q (异于点 P), 连接 OQ . 在 $Rt\triangle OPQ$ 中, $OQ > OP = r$. 所以, 除点 P 外直线 l 上的点都在 $\odot O$ 的外部, 即直线 l 与 $\odot O$ 仅有一个公共点 P . 所以直线 l 与 $\odot O$ 相切.

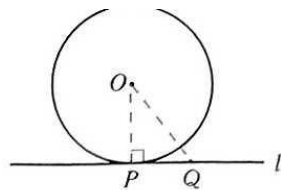


图 1.4-2

(2) 必要性 ($q \Rightarrow p$): 若直线 l 与 $\odot O$ 相切, 不妨设切点为 P , 则 $OP \perp l$. 因此, $d = OP = r$.

由 (1)(2) 可得, $d = r$ 是直线 l 与 $\odot O$ 相切的充要条件.

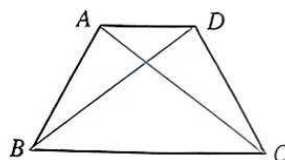
练习

1. 下列各题中, 哪些 p 是 q 的充要条件?

- (1) p : 三角形为等腰三角形, q : 三角形存在两角相等;
- (2) p : $\odot O$ 内两条弦相等, q : $\odot O$ 内两条弦所对的圆周角相等;
- (3) $p: A \cap B$ 为空集, $q: A$ 与 B 之一为空集.

2. 分别写出“两个三角形全等”和“两个三角形相似”的几个充要条件.

3. 证明: 如图, 梯形 $ABCD$ 为等腰梯形的充要条件为 $AC = BD$.



(第 3 题)

习题 1.4



复习巩固

1. 举例说明:

- (1) p 是 q 的充分不必要条件;
- (2) p 是 q 的必要不充分条件;
- (3) p 是 q 的充要条件.

2. 在下列各题中, 判断 p 是 q 的什么条件(请用“充分不必要条件” “必要不充分条件” “充要条件” “既不充分也不必要条件”回答):

- (1) p : 三角形是等腰三角形, q : 三角形是等边三角形;
- (2) p : 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实数根, $q: b^2 - 4ac \geq 0 (a \neq 0)$;
- (3) $p: a \in P \cap Q, q: a \in P$;
- (4) $p: a \in P \cup Q, q: a \in P$;
- (5) $p: x > y, q: x^2 > y^2$.

3. 判断下列命题的真假:

- (1) 点 P 到圆心 O 的距离大于圆的半径是点 P 在 $\odot O$ 外的充要条件;
- (2) 两个三角形的面积相等是这两个三角形全等的充分不必要条件;
- (3) $A \cup B = A$ 是 $B \subseteq A$ 的必要不充分条件;
- (4) x 或 y 为有理数是 xy 为有理数的既不充分也不必要条件.



综合运用

4. 已知 $A = \{x | x \text{ 满足条件 } p\}$, $B = \{x | x \text{ 满足条件 } q\}$,

- (1) 如果 $A \subseteq B$, 那么 p 是 q 的什么条件?
- (2) 如果 $B \subseteq A$, 那么 p 是 q 的什么条件?
- (3) 如果 $A = B$, 那么 p 是 q 的什么条件?

5. 设 $a, b, c \in R$. 证明: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ 的充要条件是 $a = b = c$.



拓广探索

6. 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三条边, 且 $a \leq b \leq c$ 我们知道, 如果 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 那么 $a^2 + b^2 = c^2$ (勾股定理). 反过来, 如果 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么 $\triangle ABC$ 为直角三角形 (勾股定理的逆定理). 由此可知, $\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件是 $a^2 + b^2 = c^2$

请利用边长 a, b, c 分别给出 $\triangle ABC$ 为锐角三角形和钝角三角形的一个充要条件, 并证明.

几何命题与充分条件、必要条件

通过前面的学习我们发现,对于一种几何图形或几何图形之间的关系,可以通过充要条件给出它的等价定义,通过充分条件给出它的判定定理,通过必要条件给出它的性质定理,利用充分条件、必要条件梳理已学的几何命题,可以促进我们更深入地理解几何图形及其关系.下面以相似三角形为例进行说明.

为了方便,我们记 q : 两个三角形相似.

1.相似三角形的定义

三角形的相似是三角形之间的一种关系,它的定义是:三个角分别相等、三条边成比例的两个三角形叫做相似三角形.

记 p : 三个角分别相等且三条边成比例.因为 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的

充要条件.

三条边、三个内角是三角形的六个要素,相似三角形的定义从两个三角形各要素间的相互关系给出了两个三角形相似的充要条件.

2.相似三角形的判定

相似三角形的判定指出了“满足什么条件的两个三角形相似”.初中学过如下判定定理:

- (1) 三边成比例的两个三角形相似;
- (2) 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似;
- (3) 两角分别相等的两个三角形相似.

记 p_1 : 三边成比例, p_2 : 两边成比例且夹角相等, p_3 : 两角分别相等, 我们有 $p_1 \Rightarrow q, p_2 \Rightarrow q, p_3 \Rightarrow q$, 即 p_1, p_2, p_3 分别给出了 q 的一个充分条件.

上述判定定理分别从两个三角形的边、边角、角等要素之间的相互关系给出了相似三角形的充分条件.事实上,我们还可以给出相似三角形的其他充分条件,例如“相似于同一个三角形的两个三角形相似”(这表明,“相似”具有传递性).

利用判定定理我们可以判定两个三角形是相似三角形.

想一想: (1)你能给出相似三角形的其他充分条件吗?(2) 利用判定定理可以判定两个三角形不是相似三角形吗?为什么?

3.相似三角形的性质

相似三角形的性质给出了两个三角形相似所必须满足的条件.换言之,如果不满足这个条件,那么这两个三角形就一定不相似.在初中,我们学过的相似三角形性质定理有:

(1)相似三角形对应线段的比都相等(等于相似比),特别地,相似三角形的对应边之比、对应高之比、对应中线之比、对应角平分线之比都相等(等于相似比);