



.....	3
专题 01 集合专辑.....	4
专题 02 常用逻辑用语.....	11
专题 03 函数性质.....	20
专题 04 函数与导数.....	30
专题 05 三角函数与解三角.....	41
专题 06 平面向量.....	53
专题 07 数列.....	63
专题 08 不等式.....	74
专题 09 立体几何.....	89
专题 10 解析几何.....	107
专题 11 排列组合 二项式定理.....	141
专题 12 概率与统计.....	152
专题 13 算法、推理与证明、复数.....	177
专题 14 极坐标与参数方程、不等式选讲.....	190
专题 15 分段函数的性质、图象以及应用.....	214
专题 16 基本初等函数中含有参数问题.....	228
专题 17 函数、数列、三角函数中大小比较问题.....	239
专题 18 函数、不等式中恒成立问题.....	253
专题 19 数列中的最值问题.....	267
专题 21 几何体与球切、接的问题.....	283
专题 22 几何体的表面积与体积的求解.....	299
专题 23 与圆有关的最值问题.....	311
专题 24 立体几何角的计算问题.....	319
专题 25 椭圆、双曲线、抛物线的几何性质的应用.....	337
专题 26 圆锥曲线的“三定”与探索性问题.....	351
专题 27 概率与统计相结合问题.....	369



专题 01 集合专辑

讲高考

1. 【高考全国 I 卷理数 2】设集合 $A=\{x|x^2-4\leq 0\}$, $B=\{x|2x+a\leq 0\}$, 且 $A\cap B=\{x|-2\leq x\leq 1\}$, 则 $a=$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

【答案】B

【思路导引】由题意首先求得集合 A, B , 然后结合交集的结果得到关于 a 的方程, 求解方程即可确定实数 a 的值.

【解析】求解二次不等式 $x^2-4\leq 0$ 可得: $A=\{x|-2\leq x\leq 2\}$, 求解一次不等式 $2x+a\leq 0$ 可得:

$$B=\left\{x\mid x\leq -\frac{a}{2}\right\}. \text{ 由于 } A\cap B=\{x\mid -2\leq x\leq 1\}, \text{ 故: } -\frac{a}{2}=1, \text{ 解得: } a=-2. \text{ 故选 B.}$$

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了一元二次不等式的解法、含参数的一元一次不等式的解法, 考查利用集合的交集运算求参数的值, 考查数形结合思想, 考查数学运算及直观想象等学科素养. 解题关键是正确求解一元二次不等式, 应用数形结合法求参数的值.

2. 【高考全国 II 卷理数 1】已知集合 $U=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{1, 2\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ()

- A. $\{-2, 3\}$ B. $\{-2, 2, 3\}$ C. $\{-2, -1, 0, 3\}$ D. $\{-2, -1, 0, 2, 3\}$

【答案】A

【思路导引】首先进行并集运算, 然后计算补集即可.

【解析】由题意可得: $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=\{-2, 3\}$. 故选 A.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了集合的并集和补集运算, 考查数学运算学科素养. 解题关键是正确理解并集和补集的含义.

3. 【高考全国 III 卷文数 1】已知集合 $A=\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{x|3<x<15\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【思路导引】采用列举法列举出 $A\cap B$ 中元素的即可.

【解析】由题意, $A\cap B=\{5, 7, 11\}$, 故 $A\cap B$ 中元素的个数为 3, 故选 B.

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了，考查集合的交集运算，考查集合的含义，考查数学运算学科素养.

4. 【高考江苏卷 1】已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

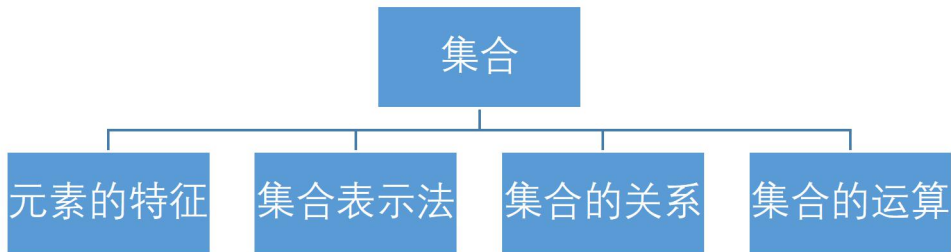
【答案】 $\{0, 2\}$.

【解析】由题知, $A \cap B = \{0, 2\}$.

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查集合的交集运算，考查数学运算学科素养. 解题关键是正确集合交集的含义.

讲考向

一、考向分析：

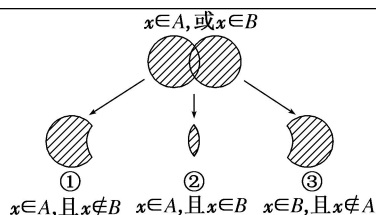


二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
元素的特征	(1)确定性：是指作为一个集合的元素必须是明确的，不能确定的对象不能构成集合．也就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素是确定的． (2)互异性：对于给定的集合，其中的元素一定是不同的，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素． (3)无序性：对于给定的集合，其中的元素是不考虑顺序的．如 1,2,3 与 3,2,1 构成的集合是同一个集合． (4)解决含参数的集合问题时，要注意检验集合中元素的互异性，否则很可能会因为不满足“互异性”而导致解题错误． (5)关注点：利用集合的含义判断一组对象能否组成一个集合，应注意集合中元素的特性，即确定性、互异性和无序性．
集合的表示	(1) 使用列举法表示集合的四个注意点 ①元素间用“，”分隔开，其一般形式为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$； ②元素不重复，满足元素的互异性； ③元素无顺序，满足元素的无序性； ④对于含有有限个元素且个数较少的集合，采取该方法较合适；若元素个数较多或有无

	限个且集合中的元素呈现一定的规律，在不会产生误解的情况下，也可以列举出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示. (2) 利用描述法表示集合应关注五点 ①写清楚该集合代表元素的符号. 例如，集合 $\{x \in \mathbb{R} x < 1\}$ 不能写成 $\{x < 1\}$. ②所有描述的内容都要写在花括号内. 例如，$\{x \in \mathbb{Z} x = 2k\}$, $k \in \mathbb{Z}$，这种表达方式就不符合要求，需将 $k \in \mathbb{Z}$ 也写进花括号内，即 $\{x \in \mathbb{Z} x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. ③不能出现未被说明的字母. ④在通常情况下，集合中竖线左侧元素的所属范围为实数集时可以省略不写. 例如，方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的实数解集可表示为 $\{x \in \mathbb{R} x^2 - 2x + 1 = 0\}$，也可写成 $\{x x^2 - 2x + 1 = 0\}$. ⑤在不引起混淆的情况下，可省去竖线及代表元素，如 $\{\text{直角三角形}\}$，$\{\text{自然数}\}$ 等.
集合的关系	(1) 对子集概念的理解 ①集合 A 是集合 B 的子集的含义是：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即由 $x \in A$ 能推出 $x \in B$. 例如 $\{0, 1\} \subseteq \{-1, 0, 1\}$，则 $0 \in \{0, 1\}, 0 \in \{-1, 0, 1\}$. ②如果集合 A 中存在着不是集合 B 的元素，那么集合 A 不包含于 B，或 B 不包含 A. 此时记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$. ③注意符号“$\in$”与“$\subseteq$”的区别：“$\subseteq$”只用于集合与集合之间，如 $\{0\} \subseteq \mathbb{N}$. 而不能写成 $\{0\} \in \mathbb{N}$，“$\in$”只能用于元素与集合之间. 如 $0 \in \mathbb{N}$，而不能写成 $0 \subseteq \mathbb{N}$. (2) 对真子集概念的理解 ①在真子集的定义中，A 是 B 的子集首先要满足 $A \subseteq B$，其次至少有一个 $x \in B$，但 $x \notin A$. ②若 A 不是 B 的子集，则 A 一定不是 B 的真子集. (3) 判断集合间关系的方法 ①用定义判断. 首先，判断一个集合 A 中的任意元素是否属于另一集合 B，若是，则 $A \subseteq B$，否则 A 不是 B 的子集；其次，判断另一个集合 B 中的任意元素是否属于第一个集合 A，若是，则 $B \subseteq A$，否则 B 不是 A 的子集；若既有 $A \subseteq B$，又有 $B \subseteq A$，则 $A = B$. ②数形结合判断. 对于不等式表示的数集，可在数轴上标出集合的元素，直观地进行判断，但要注意端点值的取舍.
	(1) 理解并集应关注三点 ① $A \cup B$ 仍是一个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成. ②“或”的数学内涵的形象图示如下：

集合的运算



③若集合 A 和 B 中有公共元素，根据集合元素的互异性，则在 $A \cup B$ 中仅出现一次.

(2) 理解交集的概念应关注四点

①概念中“且”即“同时”的意思，两个集合交集的元素必须同时是两个集合的元素.

②概念中的“所有”两字不能省，否则将会漏掉一些元素，一定要将相同元素全部找出.

③当集合 A 和集合 B 无公共元素时，不能说集合 A, B 没有交集，而是 $A \cap B = \emptyset$.

④定义中“ $x \in A$ ，且 $x \in B$ ”与“ $x \in (A \cap B)$ ”是等价的，即由既属于 A ，又属于 B 的元素组成的集合为 $A \cap B$. 而只属于集合 A 或只属于集合 B 的元素，不属于 $A \cap B$.

(3) 理解补集应关注三点

①补集既是集合之间的一种关系，同时也是集合之间的一种运算. 求集合 A 的补集的前提是 A 是全集 U 的子集，随着所选全集的不同，得到的补集也是不同的，因此，它们是互相依存、不可分割的两个概念.

② $\complement_U A$ 包含三层意思：① $A \subseteq U$ ；② $\complement_U A$ 是一个集合，且 $\complement_U A \subseteq U$ ；③ $\complement_U A$ 是由 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合.

③若 $x \in U$ ，则 $x \in A$ 或 $x \in \complement_U A$ ，二者必居其一.

考查集合的表示：

【例 1】(2021·北京人大附中模拟) 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y \leq 2, x, y \in \mathbb{N}\}$ ，则 A 中元素的个数为 ()

- A. 1 B. 5 C. 6 D. 无数个

【答案】C

【解析】由题得 $A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ ，所以 A 中元素的个数为 6，故选 C.

【点睛】本题主要考查集合的表示和化简，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力.

【例 2】(高考全国 III 卷理数 1) 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}^*, y \geq x\}$ ， $B = \{(x, y) | x + y = 8\}$ ，则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

【答案】C

【思路导引】采用列举法列举出 $A \cap B$ 中元素的即可.

【解析】由题意， $A \cap B$ 中的元素满足 $\begin{cases} y \geq x \\ x + y = 8 \end{cases}$ ，且 $x, y \in \mathbb{N}^*$ ，由 $x + y = 8 \geq 2x$ ，得 $x \leq 4$ ，

所以满足 $x+y=8$ 的有 $(1,7), (2,6), (3,5), (4,4)$ ，故 $A \cap B$ 中元素的个数为 4. 故选 C.

【专家解读】 本题的特点是注重基础，本题考查了二元一次方程及二元一次不等式混合组的整数解的解法，考查集合的交集运算，考查数学运算及直观想象等学科素养. 解题关键是正确应用二元一次方程及二元一次不等式混合组求整数解，理解集合交集的含义.

【例 3】 (2021·江苏南通·高三期中) 若集合 $M = \{x | x > 1\}$ ， $N = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 4\}$ ，则 $(C_{\mathbb{R}} M) \cap N =$ ()
 A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

【答案】 B

【解析】 $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $\complement_{\mathbb{R}} M = \{x | x \leq 1\}$ ， $\therefore (\complement_{\mathbb{R}} M) \cap N = \{0, 1\}$ ，故选 B.

【点睛】 本题考查补集、交集的运算，描述法、列举法的定义，熟记交集，补集的定义是关键，是基础题.

考查元素的特征：

【例 1】 已知集合 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$ ，且 $1 \in A$ ，则 2017^a 的值为_____.

【解析】 对集合 A 中的元素分情况讨论，当 $a+2=1$ 时， $a=-1$ ，此时有 $(a+1)^2=0$ ， $a^2+3a+3=1$ ，不满足集合中元素的互异性；当 $(a+1)^2=1$ 时， $a=0$ 或 $a=-2$ ，当 $a=-2$ ，则 $a^2+3a+3=1$ ，舍去，经验证 $a=0$ 时满足；当 $a^2+3a+3=1$ 时， $a=-1$ 或 $a=-2$ ，由上知均不满足，故 $a=0$ ，则 $2017^a=1$.

【例 2】 (2021·河南南阳月考) $M = \{x | 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$ ， $P = \{x | ax = 1\}$ ，若 $P \subseteq M$ ，则 a 的取值集合为()

A. $\{2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{0, 2, 3\}$

【答案】 D

【解析】 $M = \{x | 6x^2 - 5x + 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ ， $P = \{x | ax = 1\}$ ， $P \subseteq M$ ， $\therefore P = \emptyset$ ， $P = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ 或 $P = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ，

$\therefore a=0$ 或 $a=3$ 或 $a=2$ ， $\therefore a$ 的取值集合为 $\{0, 2, 3\}$ ，故选 D.

【点睛】 本题主要考查集合子集的定义，以及集合空集的定义，意在考查对基础知识的掌握与应用，属于基础题.

考查集合的关系：

【例 1】 (2021·陕西省榆林中学高三三模) 已知集合 $A = \{0, 1\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则满足 $A \cup C = B$ 的集合 C 的个数为 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】 A

【解析】由 $A \cup C = B$ 可知集合 C 中一定有元素 2，所以符合要求的集合 C 有 $\{2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 0, 1\}$ ，共 4 种情况，所以选 A 项。

【例 2】(2019·辽宁高考模拟(理)) 已知集合 $A = \{-2, 3, 1\}$ ，集合 $B = \{3, m^2\}$ 。若 $B \subseteq A$ ，则实数 m 的取值集合为 ()

- A. $\{1\}$ B. $\{\sqrt{3}\}$ C. $\{1, -1\}$ D. $\{\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

【答案】C

【解析】将选项中的元素逐一验证，排除错误选项，由此得出正确选项。若 $m = 1$ ，则 $B = \{1, 3\}$ ，符合 $B \subseteq A$ ，排除 B, D 两个选项。若 $m = -1$ ，则 $B = \{1, 3\}$ ，符合 $B \subseteq A$ ，排除 A 选项。故本小题选 C。

【点睛】本小题主要考查子集的概念，考查选择题的解法——排除法，属于基础题。

考查集合的运算：

【例 1】(2021·南京市秦淮中学高三开学考试) 设 $A = \{x | x > 1\}$ ， $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ，则 $(C_R A) \cap B =$ ()

- A. $\{x | x > -1\}$ B. $\{x | -1 < x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$

【答案】B

【解析】 $C_R A = \{x | x \leq 1\}$ ， $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\} = \{x | (x - 2)(x + 1) < 0\} = \{x | -1 < x < 2\}$ ，

则 $(C_R A) \cap B = \{x | -1 < x \leq 1\}$ ，故选：B。

【点睛】本题考查集合的交并补运算，考查一元二次不等式的解法，属于基础题。

【例 2】(2021·甘肃兰州一中高三其他(文)) 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ，集合 $B = \{y | y = \sqrt{2 - x}\}$ ，则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(0, 2)$ D. $[0, +\infty)$

【答案】D

【解析】 $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ， $B = \{y | y \geq 0\}$ ， $\therefore A \cup B = [0, +\infty)$ ，故选 D。

【点睛】考查描述法、区间的定义，对数函数的单调性，以及并集的运算。

讲题型

一、因忽视集合中元素的互异性而致误

【例 1】已知全集 $U = \{1, 3, x^3 + 3x^2 + 2x\}$ 和它的子集 $A = \{1, |2x - 1|\}$ ，如果集合 A 在 U 中的补集为 $\{0\}$ ，求实数 x 的值。

【解析】因为 $U = \{1, 3, x^3 + 3x^2 + 2x\}$ ，且集合 A 在 U 中的补集为 $\{0\}$ ，

所以 $0 \in U$ ， $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ ，解得 $x_1 = 0$ ， $x_2 = -1$ ， $x_3 = -2$ 。

当 $x = 0$ 时， $A = \{1, 1\}$ ，与集合中元素的互异性矛盾，故舍去；

当 $x = -2$ 时， $A = \{1, 5\} \subseteq U$ ，不符合题意，故舍去；

当 $x = -1$ 时， $A = \{1, 3\} \subseteq U$ ，符合题意。

综上所述，实数 x 的值为 -1 。

二、忽视代表元素而致误

【例 2】设 $P = \{y|y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ ， $Q = \{y|y = 2 - |x|, x \in \mathbf{R}\}$ ，求 $P \cap Q$ 。

【错解】由 $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - |x| \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1 \end{cases}$ ，所以 $P \cap Q = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ 。

【剖析】上述解法混淆了集合的代表元素，本题中两个集合中的代表元素是 y ，而不是点的坐标。

【正解】因为 $P = \{y|y = x^2, x \in \mathbf{R}\} = \{y|y \geq 0\}$ ， $Q = \{y|y = 2 - |x|, x \in \mathbf{R}\} = \{y|y \leq 2\}$ ，所以 $P \cap Q = \{y|y \geq 0\} \cap \{y|y \leq 2\} = \{y|0 \leq y \leq 2\}$ 。

三、因忽视区间端点而致误

【例 3】已知集合 $A = \{x|2 \leq x \leq 3\}$ ，集合 $B = \{x|a < x < a + 4\}$ ，若 $A \cap B = \emptyset$ ，求实数 a 的取值范围。

【错解】因为 $A = \{x|2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x|a < x < a + 4\}$ ，要使 $A \cap B = \emptyset$ ，需满足 $a + 4 < 2$ 或 $a > 3$ ，即 $a < -2$ 或 $a > 3$ ，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ 。

【剖析】上述解法的错误原因是忽视了集合 $A = \{x|2 \leq x \leq 3\}$ 的两个端点值 2 和 3，事实上，当 $a = 3$ 时， $B = \{x|3 < x < 7\}$ ，满足 $A \cap B = \emptyset$ 。当 $a + 4 = 2$ 即 $a = -2$ 时， $B = \{x|-2 < x < 2\}$ ，满足 $A \cap B = \emptyset$ 。

【正解】因为 $A = \{x|2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x|a < x < a + 4\}$ ，要使 $A \cap B = \emptyset$ ，需满足 $a \geq 3$ 或 $a + 4 \leq 2$ ，即 $a \geq 3$ 或 $a \leq -2$ ，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ 。

四、因忽视空集的特殊性而致误

【例 4】已知集合 $A = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ， $B = \{x|x^2 - ax + a - 1 = 0\}$ ， $C = \{x|x^2 - mx + 2 = 0\}$ ，且 $A \cup B = A$ ， $A \cap C = C$ ，求实数 a 及 m 的取值范围。

【错解】由题意得， $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{1, a - 1\}$ 。由 $A \cup B = A$ 知 $B \subseteq A$ ，所以 $a - 1 = 2$ ，从而 $a = 3$ 。由 $A \cap C = C$ 知 $C \subseteq A$ ，设方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 x_2 = 2$ 。由 $A = \{1, 2\}$ 知 $C = A$ ，从而 $m = x_1 + x_2 = 3$ 。

【剖析】上述解法存在两个方面的错误：一是忽略了集合 B 中方程有两等根的情况；二是忽视了 $C = \emptyset$ 的情况。

【正解】由题意得， $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{x|(x - 1)[x - (a - 1)] = 0\}$ 。由 $A \cup B = A$ ，知 $B \subseteq A$ ，所以可能有两种情况：

① $a - 1 = 2$ ，即 $a = 3$ ，此时 $A = B$ ；② $a - 1 = 1$ ，即 $a = 2$ ，此时 $B = \{1\}$ 。

若 $C = \emptyset$ ，显然满足 $A \cap C = C$ ，此时，由 $\Delta = m^2 - 8 < 0$ 得 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ 。

若 $C \neq \emptyset$ ，设方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 x_2 = 2$ 。由 $A \cap C = C$ 知 $C \subseteq A$ ，故有 $C = A$ ，从而 $m = x_1 + x_2 = 3$ 。

综上所述： $a = 3$ 或 $a = 2$ ； $m = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ，所以 m 的取值范围是 $\{3\} \cup (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 。

专题 02 常用逻辑用语

讲高考

1. 【高考浙江卷 6】已知空间中不过同一点的三条直线 m, n, l ，则“ m, n, l 在同一平面”是“ m, n, l 两两相交”的 ()

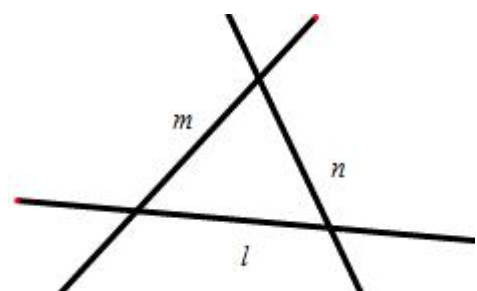
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】将两个条件相互推导，根据能否推导的结果判断充分必要条件.

【详解】解法一：由条件可知当 m, n, l 在同一平面，则三条直线不一定两两相交，由可能两条直线平行，或三条直线平行，反过来，当空间中不过同一点的三条直线 m, n, l 两两相交，如图，



三个不同的交点确定一个平面，则 m, n, l 在同一平面， $\therefore$ “ m, n, l ” 在同一平面是 “ m, n, l 两两相交” 的必要不充分条件，故选 B.

解法二：依题意 m, n, l 是空间不过同一点的三条直线，

当 m, n, l 在同一平面时，可能 $m \parallel n \parallel l$ ，故不能得出 m, n, l 两两相交.

当 m, n, l 两两相交时，设 $m \cap n = A, m \cap l = B, n \cap l = C$ ，根据公理 2 可知 m, n 确定一个平面 α ，而 $B \in m \subset \alpha, C \in n \subset \alpha$ ，根据公理 1 可知，直线 BC 即 $l \subset \alpha$ ， $\therefore m, n, l$ 在同一平面.

综上所述，“ m, n, l 在同一平面”是“ m, n, l 两两相交”的必要不充分条件. 故选 B.

【点睛】本小题主要考查充分、必要条件的判断，考查公理 1 和公理 2 的运用，属于中档题.

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了空间点、线、面位置关系的判断，考查充分条件、必要条件及充要条件的判断，考查数学运算、直观想象、逻辑推理等学科素养. 解题关键是正确理解空间点线面的位置

【答案】A

【解析】 q_1 : 当 $a > 0$, $f(a) > 0$, 因为函数 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x+a) < f(x) < f(x) + f(a)$, 即 $f(x+a) < f(x) + f(a)$, 存在 $a > 0$, 当满足命题 q_1 时, 使命题 p 成立,

q_2 : 当 $a = x_0 < 0$ 时, $f(a) = 0$, 因为函数 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x+a) < f(x) = f(x) + f(a)$, 即 $f(x+a) < f(x) + f(a)$, 存在 $a < 0$, 当满足命题 q_2 时, 命题 p 成立,

综上可知命题 q_1 、 q_2 都是命题 p 的充分条件, 故选 A.

【专家解读】本题的特点是注重函数单调性的应用, 本题考查了函数的性质, 考查充分条件、必要条件、充要条件的判断, 考查数学运算、逻辑推理等学科素养. 解题关键是正确理解函数单调性的应用, 理解充分条件、必要条件、充要条件的含义.

5. 【高考全国 II 卷文理 16】设有下列四个命题:

p_1 : 两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内.

p_2 : 过空间中任意三点有且仅有一个平面.

p_3 : 若空间两条直线不相交, 则这两条直线平行.

p_4 : 若直线 $l \subset$ 平面 α , 直线 $m \perp$ 平面 α , 则 $m \perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是_____.

① $p_1 \wedge p_4$

② $p_1 \wedge p_2$

③ $\neg p_2 \vee p_3$

④ $\neg p_3 \vee \neg p_4$

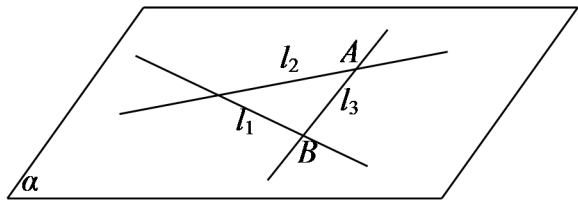
【答案】①③④

【思路导引】利用两交线直线确定一个平面可判断命题 p_1 的真假; 利用三点共线可判断命题 p_2 的真假; 利用异面直线可判断命题 p_3 的真假, 利用线面垂直的定义可判断命题 p_4 的真假. 再利用复合命题的真假可得出结论.

【解析】对于命题 p_1 , 可设 l_1 与 l_2 相交, 这两条直线确定的平面为 α ; 若 l_3 与 l_1 相交, 则交点 A 在平面 α 内, 同理 l_3 与 l_2 的交点 B 也在平面 α 内, $\therefore AB \subset \alpha$, 即 $l_3 \subset \alpha$, 命题 p_1 为真命题; 对于命题 p_2 , 若三点共线, 则过这三个点的平面有无数个, 命题 p_2 为假命题; 对于命题 p_3 , 空间中两条直线相交、平行或异面, 命题 p_3 为假命题; 对于命题 p_4 , 若直线 $m \perp$ 平面 α , 则 m 垂直于平面 α 内所有直线, $\therefore$ 直线 $l \subset$ 平面 α , $\therefore$ 直线 $m \perp$

直线 l ，命题 p_4 为真命题.

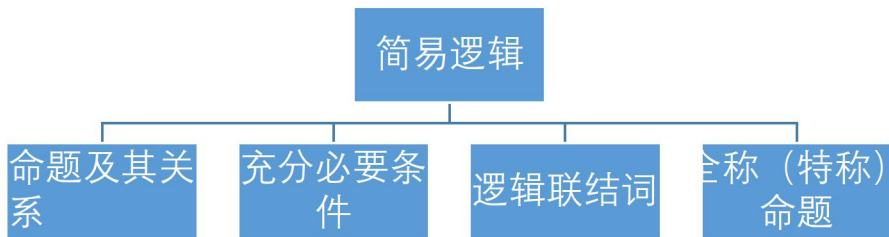
综上所述， $p_1 \wedge p_4$ 为真命题， $p_1 \wedge p_2$ 为假命题， $\neg p_2 \vee p_3$ 为真命题， $\neg p_3 \vee \neg p_4$ 为真命题. 故答案为：①③④.



【专家解读】 本题的特点是注重知识的灵活应用，本题考查了空间点、线、面位置关系的判断，考查复合命题真假的判断，考查数学运算、直观想象、逻辑推理等学科素养. 解题关键是正确理解空间点线面的位置关系，理解或命题、且命题、非命题的含义及其真值表.

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
四种命题	1、判断命题真假的思路方法 (1)判断一个命题的真假时，首先要弄清命题的结构，即它的条件和结论分别是什么，把它写成“若 p，则 q”的形式，然后联系其他相关的知识，经过逻辑推理或列举反例来判定. (2)一个命题要么真，要么假，二者必居其一. 当一个命题改写成“若 p，则 q”的形式之后，判断这个命题真假的方法： ①若由“p”经过逻辑推理，得出“q”，则可判定“若 p，则 q”是真命题； ②判定“若 p，则 q”是假命题，只需举一反例即可. 2. 判断四种命题真假的方法 (1)利用简单命题判断真假的方法逐一判断. (2)利用四种命题间的等价关系：当一个命题不易直接判断真假时，可转化为判断其等价命题的真假.
	1、充分、必要条件的三种判断方法

充分必要条件	(1)定义法：根据 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ 进行判断. (2)集合法：根据 p, q 成立对应的集合之间的包含关系进行判断. (3)等价转化法：根据一个命题与其逆否命题的等价性，把要判断的命题转化为其逆否命题进行判断. 这个方法特别适合以否定形式给出的问题，如“$xy \neq 1$”是“$x \neq 1$ 或 $y \neq 1$”的何种条件，即可转化为判断“$x = 1$ 且 $y = 1$”是“$xy = 1$”的何种条件. 2、根据充分、必要条件求参数的思路方法 根据充分、必要条件求参数的值或取值范围的关键是合理转化条件，常通过有关性质、定理、图象将恒成立问题和有解问题转化为最值问题等，得到关于参数的方程或不等式(组)，然后通过解方程或不等式(组)求出参数的值或取值范围.
逻辑联结词	1、判断含有逻辑联结词命题真假的键及步骤 (1)判断含有逻辑联结词的命题真假的关键是正确理解“或”“且”“非”的含义，应根据命题中所出现的逻辑联结词进行命题结构的分析与真假的判断. (2)判断命题真假的步骤 确定复合命题 的构成形式 $\Rightarrow$ 判断其中简单 命题的真假 $\Rightarrow$ 判断复合命 题的真假 2、根据复合命题真假求参数的步骤 (1)根据题目条件，推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况); (2)求出每个命题是真命题时参数的取值范围; (3)根据给出的复合命题的真假推出每个命题的真假情况，从而求出参数的取值范围.
全称（特称）命题	1、对全(特)称命题进行否定的方法 全(特)称命题的否定与命题的否定有一定的区别，否定全称命题和特称命题时： (1)改写量词，全称量词改写为存在量词，存在量词改写为全称量词; (2)否定结论，而一般命题的否定只需直接否定结论即可. [提醒] 对于省略量词的命题，应先挖掘命题中的隐含的量词，改写成含量词的完整形式，再写出命题的否定. 2、全(特)称命题真假的判断方法 (1)全称命题真假的判断方法 ①要判断一个全称命题是真命题，必须对限定的集合 M 中的每一个元素 x，证明 $p(x)$ 成立. ②要判断一个全称命题是假命题，只要能举出集合 M 中的一个特殊值 $x = x_0$，使 $p(x_0)$ 不成立即可. (2)特称命题真假的判断方法 要判断一个特称命题是真命题，只要在限定的集合 M 中，找到一个 $x = x_0$，使 $p(x_0)$ 成立即可，否则这一特称命题就是假命题.

考查四种命题：

【例 1】命题“若 $x^2+y^2=0$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x=y=0$ ”的逆否命题是()

- A. 若 $x \neq y \neq 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2+y^2=0$
- B. 若 $x=y \neq 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2+y^2 \neq 0$
- C. 若 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2+y^2 \neq 0$
- D. 若 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2+y^2 \neq 0$

【答案】D

【解析】将原命题的条件和结论否定, 并互换位置即可. 由 $x=y=0$ 知 $x=0$ 且 $y=0$, 其否定是 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$. 故原命题的逆否命题是“若 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2+y^2 \neq 0$ ”.

【例 2】下列命题中, 真命题的个数为 ()

- ①命题“若 $\ln a > \ln b$, 则 $a > b$ ”的否命题;
- ②命题“若 $2^{x+y} > 1$, 则 $x > 0$ 或 $y > 0$ ”;
- ③命题“若 $m = 2$, 则直线 $x - my = 0$ 与直线 $2x - 4y + 1 = 0$ 平行”的逆命题 .

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

【答案】C

【解析】①的逆命题为“若 $a > b$, 则 $\ln a > \ln b$ ”, 由对数定义域可知该命题为假命题, 故否命题也为假命题;

②的逆否命题为“若 $x \leq 0$ 且 $y \leq 0$, 则 $2^{x+y} \leq 1$ ”, 该命题为真命题, 故②为真命题;

③的逆命题为“若直线 $x - my = 0$ 与直线 $2x - 4y + 1 = 0$ 平行, 则 $m = 2$ ”, 该命题为真命题.

综上所述, 正确的为②③, 故选: C.

【点睛】本题考查了命题与逆否命题、否命题与逆命题、命题与逆命题的真假关系应用, 属于基础题.

考查充分必要条件

【例 1】(2021·广西钦州市、崇左市一模) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, “ $a > |b|$ ”是“ $a|a| > b|b|$ ”的 ().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由题意, 若 $a > |b|$, 则 $a > |b| \geq 0$, 则 $a > 0$ 且 $a > b$, 所以 $a|a| = a^2$, 则 $a|a| > b|b|$ 成立.

当 $a=1, b=-2$ 时, 满足 $a|a| > b|b|$, 但 $a > |b|$ 不一定成立, 所以 $a > |b|$ 是 $a|a| > b|b|$ 的充分不必要条件, 故

选 A.

【例 2】(2021·湖北高三月考) 已知 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$, 命题“ $\forall x \in A, x^2 - a \leq 0$ ”是真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $a \geq 4$ B. $a \leq 4$ C. $a \geq 5$ D. $a \leq 5$

【答案】C

【解析】因为 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$, $\forall x \in A, x^2 - a \leq 0$ 为真命题, 所以 $a \geq (x^2)_{\max}$, $x \in A$, 因为函数 $f(x) = x^2$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $(x^2)_{\max} = 4$, 所以 $a \geq 4$, 又因为 $[5, +\infty) \not\subseteq [4, +\infty)$, 所以命题“ $\forall x \in A, x^2 - a \leq 0$, $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ ”是真命题的一个充分不必要条件为 $a \geq 5$, 故选 C.

考查逻辑联结词:

【例 1】(2021·安徽月考) 已知命题 p : 函数 $y = \log_2\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + a\right)$ 的定义域为 R , 命题 q : 函数 $y = -(5-a)^x$ 是减函数, 若 $p \vee q$ 和 $\neg p$ 都为真命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 2$ B. $2 < a < 4$ C. $a < 4$ D. $a \leq 2$ 或 $a \geq 4$

【答案】A

【解析】由 $p \vee q$ 为真命题, $\neg p$ 为真命题, 得 p 为假命题, q 为真命题.

由 p : 函数 $y = \log_2\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + a\right)$ 为假命题得, $\frac{1}{2}x^2 + 2x + a > 0$ 在 R 上不恒成立,

即 $\Delta = 4 - 2a \geq 0 \Rightarrow a \leq 2$.

由 q : 函数 $y = -(5-a)^x$ 是减函数, 即: $y = (5-a)^x$ 是增函数, 即 $5-a > 1 \Rightarrow a < 4$, 所以: $a \leq 2$, 故选 A.

【点睛】本题主要考查逻辑联结词“或”、“且”、“非”, 命题的真假判断, 属于中档题.

【例 2】设命题 p : $f(x) = \lg(ax^2 - 4x + a)$ 的定义域为 R ; 命题 q : 不等式 $2x^2 + x > 2 + ax$ 在 $x \in (-\infty, -1)$ 上恒成立, 如果命题 “ $p \vee q$ ” 为真命题, 命题 “ $p \wedge q$ ” 为假命题, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $[1, 2]$

【解析】对于命题 p : $\Delta < 0$ 且 $a > 0$, 故 $a > 2$; 对于命题 q : $a > 2x - \frac{2}{x} + 1$ 在 $x \in (-\infty, -1)$ 上恒成立, 又函数 $y = 2x - \frac{2}{x} + 1$ 为增函数, 所以 $\left[2x - \frac{2}{x} + 1\right]_{\max} < 1$, 故 $a \geq 1$. 命题 “ $p \vee q$ ” 为真命题, 命题 “ $p \wedge q$ ” 为假命题, 等价于 p, q

一真一假, 即 $\begin{cases} a > 2, \\ a < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \leq 2, \\ a \geq 1, \end{cases}$ 故 $1 \leq a \leq 2$.

考查全称(特称)命题:

【例 1】(2021·黑龙江萨尔图·大庆实验中学月考) 已知命题 $p: \exists \alpha \in R, \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$, 命题 q : 正数的对数都是正数, 则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $(\neg p) \vee q$
- B. $p \wedge q$
- C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$
- D. $(\neg p) \vee (\neg q)$

【答案】 D

【解析】 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$, $\because \sqrt{2} > \frac{5}{4}$, $\therefore \exists \alpha \in R, \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$, 故命题 p 为真命

题；命题 q ：正数的对数都是正数. 是假命题，当 $x=1$ 时，对数值为 0， $\therefore \neg p$ 命题为假， $\neg q$ 命题为真，

$\therefore (\neg p) \vee (\neg q)$ 为真命题，故选 D.

【点睛】本题考查了特称命题、复合命题的真假判断、三角函数诱导公式的应用以及对数性质，属于中档题目，题目综合性较强，在解题过程中需要对知识点准确应用，尤其是复合命题的真假判断容易出错.

【例 2】若命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + (a-1)x_0 + 1 < 0$ ”是真命题，则实数 a 的取值范围是()

- A. $[-1, 3]$ B. $(-1, 3)$ C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

【答案】 D

【解析】因为命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + (a-1)x_0 + 1 < 0$ ”是真命题等价于 $x_0^2 + (a-1)x_0 + 1 = 0$ 有两个不等的实根，所以 $\Delta = (a-1)^2 - 4 > 0$ ，即 $a^2 - 2a - 3 > 0$ ，解得 $a < -1$ 或 $a > 3$ ，故选 D.

讲方法

充分条件与必要条件判定的三种方法

1. 定义法:

- (1)若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件;
- (2)若 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要条件;
- (3)若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件;
- (4)若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件;
- (5)若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件;
- (6)若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 利用集合间的包含关系判断：记条件 p, q 对应的集合分别是 A, B ，则

- (1)若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件;
- (2)若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 的充分不必要条件, 或 q 是 p 的必要不充分条件;
- (3)若 $A=B$, 则 p 是 q 的充要条件;

(4)若 $A \not\subseteq B$, 且 $A \not\supseteq B$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

3. 等价法: 利用 $p \Rightarrow q$ 与 $\neg q \Rightarrow \neg p$, $q \Rightarrow p$ 与 $\neg p \Rightarrow \neg q$, $p \Leftrightarrow q$ 与 $\neg q \Leftrightarrow \neg p$ 的等价关系.

【例 1】(2021·渝·重庆巴蜀中学月考) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项的和为 S_n , 则“ $q > 0$ ”是“ $S_1 \cdot S_3 < S_2^2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】 $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1(1+q)$, $S_3 = a_1(1+q+q^2)$, 故 $S_2^2 - S_1 \cdot S_3 = a_1^2 \left[(1+q)^2 - (1+q+q^2) \right] = a_1^2 q$,

因为在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 \neq 0$, 故 $S_1 \cdot S_3 < S_2^2 \Leftrightarrow q > 0$, 故“ $q > 0$ ”是“ $S_1 \cdot S_3 < S_2^2$ ”的充要条件, 故选 C.

【例 2】(2021·四川成都·月考) “ $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ ” 是 “函数 $f(x) = \begin{cases} (3m-1)x+4m, & x < 1 \\ -mx, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 R 上的减函数” 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】因为函数 $f(x) = \begin{cases} (3m-1)x+4m, & x < 1 \\ -mx, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 R 上的减函数，

所以 $\begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -m < 0 \\ (3m-1)+4m \geq -m \end{cases}$, 解得 $m \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$,

因为 $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$ 是 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 的真子集，所以“ $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ ”是“函数 $f(x) = \begin{cases} (3m-1)x+4m, & x < 1 \\ -mx, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 R 上的减函数”的必要不充分条件，故选 B.

【点睛】本题考查充分条件以及必要条件的判断，可借助集合的方式进行判断，考查分段函数的单调性，分段函数在定义域上单调递减时，每段函数都递减，且要注意分界点处函数值的处理，是中档题.

专题 03 函数性质

讲高考

1. 【高考全国 II 卷文数 10】设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ ()

- A. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 B. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减
C. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增 D. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

【答案】A

【思路导引】根据函数的解析式可知函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 利用定义可得出函数 $f(x)$ 为奇函数, 再根据函数的单调性法则, 即可解出.

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 其关于原点对称, 而 $f(-x) = -f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数.

又 $\because$ 函数 $y = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 而 $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在

$(-\infty, 0)$ 上单调递减, $\therefore$ 函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 故选 A.

2. 【高考全国 II 卷文数 12 理数 11】若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则 ()

- A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$ C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$

【答案】A

【思路导引】将不等式变为 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$, 根据 $f(t) = 2^t - 3^{-t}$ 的单调性知 $x < y$, 以此去判断各个选项中真数与 1 的大小关系, 进而得到结果.

【解析】由 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ 得: $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$, 令 $f(t) = 2^t - 3^{-t}$,

$\because y = 2^x$ 为 R 上的增函数, $y = 3^{-x}$ 为 R 上的减函数, $\therefore f(t)$ 为 R 上的增函数, $\therefore x < y$,

$\because y - x > 0$, $\therefore y - x + 1 > 1$, $\therefore \ln(y - x + 1) > 0$, 则 A 正确, B 错误; $\because |x - y|$ 与 1 的大小不确定, 故 CD

无法确定, 故选 A.

3. 【高考全国 II 卷理数 9】设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ ，则 $f(x)$ ()

- A. 是偶函数，且在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 单调递增 B. 是奇函数，且在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 单调递减
- C. 是偶函数，且在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 单调递增 D. 是奇函数，且在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 单调递减

【答案】D

【思路导引】根据奇偶性的定义可判断出 $f(x)$ 为奇函数，排除 AC；当 $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时，利用函数单调性的性质可判断出 $f(x)$ 单调递增，排除 B；当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时，利用复合函数单调性可判断出 $f(x)$ 单调递减，从而得到结果。

【解析】由 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ 得 $f(x)$ 定义域为 $\left\{x \mid x \neq \pm \frac{1}{2}\right\}$ ，关于坐标原点对称，

$$\text{又 } f(-x) = \ln|1-2x| - \ln|-2x-1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为定义域上的奇函数，可排除 AC；

当 $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时， $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x)$ ，

Q $y = \ln(2x+1)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增， $y = \ln(1-2x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，排除 B；

当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时， $f(x) = \ln(-2x-1) - \ln(1-2x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)$ ，

$\because \mu = 1 + \frac{2}{2x-1}$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减， $f(\mu) = \ln \mu$ 在定义域内单调递增，

根据复合函数单调性可知： $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，D 正确。故选 D。

4. 【高考全国 I 卷理数 12】若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$ ，则 ()

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

【答案】B

【思路导引】设 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ ，利用作差法结合 $f(x)$ 的单调性即可得到答案.

【解析】设 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ ，则 $f(x)$ 为增函数， $\because 2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b = 2^{2b} + \log_2 b$ ，

$$\therefore f(a) - f(2b) = 2^a + \log_2 a - (2^{2b} + \log_2 2b) = 2^{2b} + \log_2 b - (2^{2b} + \log_2 2b) = \log_2 \frac{1}{2} = -1 < 0,$$

$$\therefore f(a) < f(2b), \therefore a < 2b.$$

$$\therefore f(a) - f(b^2) = 2^a + \log_2 a - (2^{b^2} + \log_2 b^2) = 2^{2b} + \log_2 b - (2^{b^2} + \log_2 b^2) = 2^{2b} - 2^{b^2} - \log_2 b,$$

当 $b=1$ 时， $f(a) - f(b^2) = 2 > 0$ ，此时 $f(a) > f(b^2)$ ，有 $a > b^2$ ；当 $b=2$ 时， $f(a) - f(b^2) = -1 < 0$ ，此时 $f(a) < f(b^2)$ ，有 $a < b^2$ ， $\therefore$ C、D 错误，故选 B.

5. 【高考全国III卷理数 12】已知 $5^5 < 8^4$ ， $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$ ， $b = \log_8 5$ ， $c = \log_{13} 8$ ，则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【答案】A

【思路导引】由题意可得 $a, b, c \in (0, 1)$ ，利用作商法以及基本不等式可得出 a, b 的大小关系，由 $b = \log_8 5$ ，

得 $8^b = 5$ ，结合 $5^5 < 8^4$ 可得出 $b < \frac{4}{5}$ ，由 $c = \log_{13} 8$ ，得 $13^c = 8$ ，结合 $13^4 < 8^5$ ，可得出 $c > \frac{4}{5}$ ，综合可得出 a 、

b, c 的大小关系.

【解析】解法一：由题意可知 $a, b, c \in (0, 1)$ ，

$$\frac{a}{b} = \frac{\log_5 3}{\log_8 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 5} < \frac{1}{(\lg 5)^2} \cdot \left(\frac{\lg 3 + \lg 8}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lg 3 + \lg 8}{2 \lg 5} \right)^2 = \left(\frac{\lg 24}{\lg 25} \right)^2 < 1, \therefore a < b;$$

由 $b = \log_8 5$ ，得 $8^b = 5$ ，由 $5^5 < 8^4$ ，得 $8^{5b} < 8^4$ ， $\therefore 5b < 4$ ，可得 $b < \frac{4}{5}$ ；

由 $c = \log_{13} 8$ ，得 $13^c = 8$ ，由 $13^4 < 8^5$ ，得 $13^4 < 13^{5c}$ ， $\therefore 5c > 4$ ，可得 $c > \frac{4}{5}$.

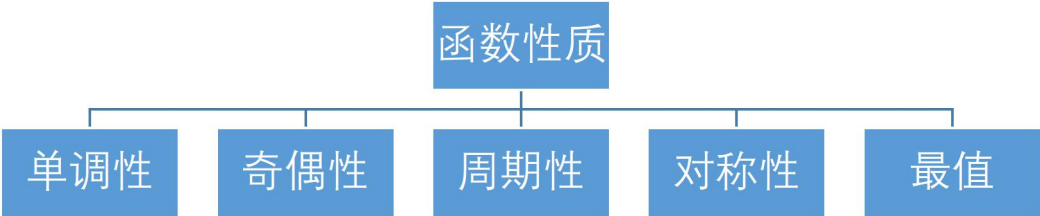
综上所述， $a < b < c$. 故选 A.

解法二：易知 $a, b, c \in (0, 1)$ ，由 $\frac{a}{b} = \frac{\log_5 3}{\log_8 5} = \log_5 3 \cdot \log_5 8 < \frac{(\log_5 3 + \log_5 8)^2}{4} = \frac{(\log_5 24)^2}{4} < \frac{2^2}{4} = 1$ ，知

$a < b$. $\because b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, $\therefore 8^b = 5$, $13^c = 8$, 即 $8^{5b} = 5^5$, $13^{4c} = 8^4$ 又 $\because 5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$, $\therefore 13^{4c} = 8^4 > 5^5 = 8^{5b} > 13^{4b}$, 即 $b < c$. 综上所述: $a < b < c$, 故选 A.

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
单调性	1、用单调性求解与抽象函数有关不等式的策略 (1)在求解与抽象函数有关的不等式时，往往是利用函数的单调性将“f”符号脱掉，使其转化为具体的不等式求解。此时应特别注意函数的定义域。 (2)有时，在不等式一边没有符号“f”时，需转化为含符号“f”的形式。如若已知 $f(a)=0$, $f(x-b)<0$, 则 $f(x-b)<f(a)$。 2、函数单调性应用问题的常见类型及解题策略 (1) 比较大小。比较函数值的大小，应将自变量转化到同一个单调区间内，然后利用函数的单调性解决。 (2) 解不等式。在求解与抽象函数有关的不等式时，往往是利用函数的单调性将“f”符号脱掉，使其转化为具体的不等式求解。此时应特别注意函数的定义域。 3、利用单调性求参数的值或取值范围。 (1)视参数为已知数，依据函数的图象或单调性定义，确定函数的单调区间，与已知单调区间比较求参数。 (2)需注意若函数在区间[a, b]上是单调的，则该函数在此区间的任意子区间上也是单调的。 (3)分段函数的单调性，除注意各段的单调性外，还要注意衔接点的取值。
奇偶性	1、利用奇偶性求值的类型及方法 (1)求函数值：利用奇偶性将待求值转化到已知区间上的函数值，进而得解。 (2)求参数值：在定义域关于原点对称的前提下，根据奇函数满足 $f(-x)=-f(x)$或偶函数满足 $f(-x)=f(x)$列等式，根据等式两侧对应相等确定参数的值。特别要注意的是：若能够确定奇函数的定义域中包含 0，可以根据 $f(0)=0$ 列式求解，若不能确定则不可用此法。 2、判断函数的奇偶性要注意两点

	(1) 定义域关于原点对称, 这是函数具有奇偶性的前提. (2) 判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 是否具有等量关系, 在判断奇偶性的运算中, 可以转化为判断奇偶性的等价等量关系式($f(x)+f(-x)=0$(奇函数)或 $f(x)-f(-x)=0$(偶函数))是否成立.
周期性	1、函数周期性的判定与应用 (1)判定: 判断函数的周期性只需证明 $f(x+T)=f(x)$ ($T \neq 0$) 即可. (2)应用: 根据函数的周期性, 可以由函数的局部性质得到函数的整体性质, 在解决具体问题时, 要注意结论: 若 T 是函数的周期, 则 kT ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$) 也是函数的周期. 2、根据函数的周期性, 可以由函数局部的性质得到函数的整体性质, 函数的周期性常与函数的其他性质综合命题. 3、在解决具体问题时, 要注意 “若 T 是函数的周期, 则 kT ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$) 也是函数的周期” 的应用.
最值	求函数最值的五种常用方法及其思路 (1) 单调性法: 先确定函数的单调性, 再由单调性求最值. (2) 图象法: 先作出函数的图象, 再观察其最高点、最低点, 求出最值. (3) 基本不等式法: 先对解析式变形, 使之具备 “一正二定三相等” 的条件后用基本不等式求出最值. (4) 导数法: 先求导, 然后求出在给定区间上的极值, 最后结合端点值, 求出最值. (5) 换元法: 对比较复杂的函数可通过换元转化为熟悉的函数, 再用相应的方法求最值.
对称性	

考查单调性:

【例 1】(2021 四川宜宾高三一模) 已知实数 $a = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$, $b = \frac{4}{3}e^{\frac{2}{3}}$, $c = \frac{8}{7}e^{\frac{6}{7}}$, (e 为自然对数的底数) 则 a , b ,

c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $b < a < c$

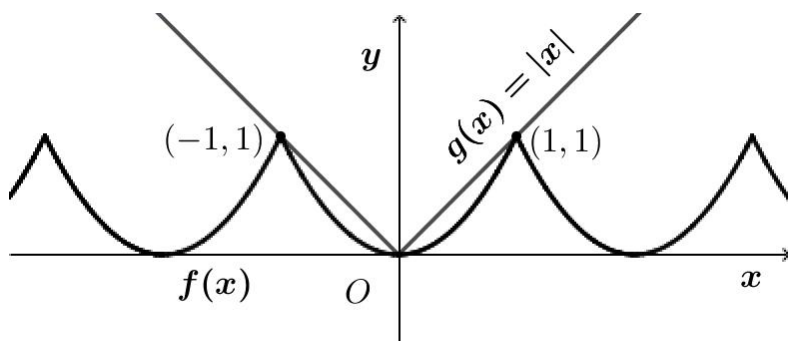
【答案】A

【解析】由题意, 令 $f(x) = \frac{x+1}{x}e^{\frac{x-1}{x}}$, 则 $a = f(2), b = f(3), c = f(7)$, 而 $f'(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^3}$, 所以 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$,

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(2) < f(3) < f(7)$, 即 $a < b < c$, 故选 A.

【名师点睛】结合实数的形式构造函数, 再用导数研究函数的单调性, 最后利用单调性比较函数值的大小.

考查奇偶性:



即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 交于 $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$ 三点, 故选 A.

【名师点睛】(1) $f(m+x)=f(x)$ 有 $f(x)$ 的周期为 m ; (2) $f(n-x)=f(x)$ 有 $f(x)$ 关于 $x=\frac{n}{2}$.

考查最值:

【例 1】已知 $a>0$, 设函数 $f(x)=\frac{2018^{x+1}+2016}{2018^x+1}$ ($x\in[-a, a]$) 的最大值为 M , 最小值为 N , 那么 $M+N=(\quad)$

A. 2 016

B. 2 018

C. 4 032

D. 4 034

【答案】D

【解析】由题意得 $f(x)=\frac{2018^{x+1}+2016}{2018^x+1}=2018-\frac{2}{2018^x+1}$. 因为 $y=2018^x+1$ 在 $[-a, a]$ 上是单调递增的, 所

以 $f(x)=2018-\frac{2}{2018^x+1}$ 在 $[-a, a]$ 上是单调递增的, 所以 $M=f(a)$, $N=f(-a)$, 所以 $M+N=f(a)+f(-$

$a)=4036-\frac{2}{2018^a+1}-\frac{2}{2018^{-a}+1}=4034$.

【例 2】(2021·四川泸州高三一模) 函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 的最大值为_____.

【答案】0

【解析】由 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln[-(x-1)^2+1]$, 且 $0<x<2$,

$\therefore$ 令 $t(x)=-(x-1)^2+1$, $f(t)=\ln t$, 即 $t(x)$ 在 $0<x<1$ 为单调递增, $1<x<2$ 为单调递减, 而 $f(t)$ 为增函

数, $\therefore f(x)$ 在 $0<x<1$ 上单调递增, $1<x<2$ 上单调递减, $f(x)_{\max}=f(1)=0$.

【例 3】对于任意实数 a, b , 定义 $\min\{a, b\}=\begin{cases} a, & a\leq b, \\ b, & a> b. \end{cases}$ 函数 $f(x)=-x+3$, $g(x)=\log_2 x$, 则函数 $h(x)=\min\{f(x),$

$g(x)\}$ 的最大值为_____.

【答案】1

【解析】依题意知, $h(x)=\begin{cases} \log_2 x, & 0<x\leq 2, \\ -x+3, & x>2. \end{cases}$ 当 $0<x\leq 2$ 时, $h(x)=\log_2 x$ 是增函数, 当 $x>2$ 时, $h(x)=3-x$ 是减

函数, 则 $h(x)_{\max}=h(2)=1$.

$g(x) = -\frac{1}{2}(1 < x \leq 2, 3 < x \leq 4, 5 < x \leq 6, 7 < x \leq 8)$ 的图象仅有 2 个交点, 即在区间 $(0, 9]$ 上, 关于 x 的方程

$f(x) = g(x)$ 有 2 个不同的实数根,

要使关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根,

则 $f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}, x \in (0, 2]$ 与 $g(x) = k(x+2), x \in (0, 1]$ 的图象有 2 个不同的交点,

由 $(1, 0)$ 到直线 $kx - y + 2k = 0$ 的距离为 1, 可得 $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 解得 $k = \frac{\sqrt{2}}{4} (k > 0)$,

$\because$ 两点 $(-2, 0), (1, 1)$ 连线的斜率 $k = \frac{1}{3}$, $\therefore \frac{1}{3} \leq k < \frac{\sqrt{2}}{4}$,

综上可知, 满足 $f(x) = g(x)$ 在 $(0, 9]$ 上有 8 个不同的实数根的 k 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

【名师点睛】本题考查分段函数, 函数的图象, 函数的性质, 函数与方程, 点到直线的距离, 直线的斜率等,

考查知识点较多, 难度较大. 正确作出函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象, 数形结合求解是解题的关键因素.

【例 2】(2021 四川宜宾高三一模) 已知定义在 R 上的奇函数 $y = f(x)$ 满足, $f(x+2) = -f(x)$, 若

$\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2)$, 则下列四个结论中: ① $y = f(x)$ 图象

关于直线 $x = 2022$ 对称; ② $f(2022) = 0$; ③ $y = f(x)$ 在 $[2019, 2021]$ 上为减函数; ④ $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right)$. 其中

正确的个数 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$, 所以对称轴为 $x = 1$,

因为 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 所以周期为 4, 所以对称轴 $x = 1 + 4k (k \in Z)$,

故 $x = 2022$ 不符合, 所以①不正确;

$f(2022) = f(4 \times 505 + 2) = f(2) = -f(0)$, 因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$,

所以 $f(2022) = 0$, 所以②正确;

因为 $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2)$,

所以 $x_1(f(x_1) - f(x_2)) > x_2(f(x_1) - f(x_2))$, 即 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为增函数, 所以 $f(x)$ 在 $[4k, 4k+1](k \in \mathbb{Z})$ 上为增函数, 所以 $y = f(x)$ 在 $[2020, 2021]$ 上为增函数, 所以③不正确;

因为 $f\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{3}\right)$, 所以 $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)$, 所以④不正确, 即正确的个数为 1 个, 故选 A.

【名师点睛】 本题考查抽象函数的周期和单调性对称性的综合应用, 解答本题的关键是先由函数为奇函数结合 $f(x+2) = -f(x)$, 得到 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$ 和 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 从而得到函数的对称性和周期性, 根据条件得出 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$, 得到函数的单调性.

讲题型

二次函数给定区间上的最值问题

【典例】 求 $f(x) = x^2 - 2ax - 1$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值.

【解析】 $f(x) = (x-a)^2 - 1 - a^2$, 对称轴为 $x = a$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 由图①可知, $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是增函数, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = -1$, $f(x)_{\max} = f(2) = 3 - 4a$.

(2) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 由图②可知, 对称轴在区间 $[0, 2]$ 内, 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = -1 - a^2$, $f(x)_{\max} = f(2) = 3 - 4a$.

(3) 当 $1 < a \leq 2$ 时, 由图③可知, 对称轴在区间 $[0, 2]$ 内, 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = -1 - a^2$, $f(x)_{\max} = f(0) = -1$.

(4) 当 $a > 2$ 时, 由图④可知, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为减函数, 所以 $f(x)_{\min} = f(2) = 3 - 4a$, $f(x)_{\max} = f(0) = -1$.

【点评】 上题由于对称轴 $x = a$, 而 a 的取值不定, 从而导致了分类讨论. 由于抛物线的对称轴在区间 $[0, 2]$ 所对应的区域时, 最小值是在顶点处取得, 但最大值却有可能是 $f(0)$, 也有可能是 $f(2)$, 故应分四类讨论. 与二次函数有关的最值问题还有以下三类:

(1) 求二次函数在某定区间上的最小(大)值.

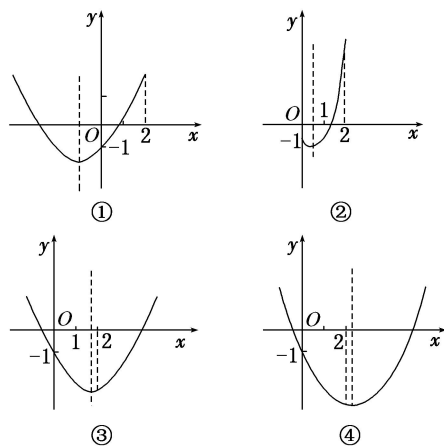
【变式 1】 求二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ 在 $[2, 4]$ 上的最小值.

【解析】 $\because$ 函数图象的对称轴是 $x = a$,

$\therefore$ 当 $a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上是增函数, $\therefore f(x)_{\min} = f(2) = 6 - 4a$.

当 $a > 4$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上是减函数, $\therefore f(x)_{\min} = f(4) = 18 - 8a$.

当 $2 \leq a \leq 4$ 时, $f(x)_{\min} = f(a) = 2 - a^2$.



$$\therefore f(x)_{\min} = \begin{cases} 6-4a, & a < 2, \\ 2-a^2, & 2 \leq a \leq 4, \\ 18-8a, & a > 4. \end{cases}$$

(2) 已知二次函数的最大(小)值, 求参数.

【变式 2】已知函数 $y = -x^2 - 2ax (0 \leq x \leq 1)$, 且 $y_{\max} = a^2$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 $\because y = -x^2 - 2ax = -(x+a)^2 + a^2 (0 \leq x \leq 1)$,

$\therefore$ 函数图象是开口向下的抛物线, 且对称轴为 $x = -a$. 又 $\because y_{\max} = a^2$, 且 $0 \leq x \leq 1$,

$\therefore 0 \leq -a \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 0$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[-1, 0]$.

(3) 求二次函数在某动区间上的最大(小)值.

【变式 3】设 $f(x) = x^2 - 4x - 4, x \in [a, a+1] (a \in \mathbb{R})$, 求函数 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$ 的解析式.

【解析】 $\because f(x) = (x-2)^2 - 8, x \in [a, a+1]$,

$\therefore$ 当 $2 \in [a, a+1]$ 时, 即 $1 \leq a \leq 2$ 时, $g(a) = f(2) = -8$.

当 $a+1 < 2$, 即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[a, a+1]$ 上是减函数, $\therefore g(a) = f(a+1) = a^2 - 2a - 7$.

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $[a, a+1]$ 上是增函数, $\therefore g(a) = f(a) = a^2 - 4a - 4$.

$$\text{综上所述, } g(a) = \begin{cases} a^2 - 2a - 7, & a < 1, \\ -8, & 1 \leq a \leq 2, \\ a^2 - 4a - 4, & a > 2. \end{cases}$$

【小结】(1) 求 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 在区间 $[m, n]$ 上的最值, 下面分析 $a > 0$ 的各情况:

① 若对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 在区间 $[m, n]$ 内, 则最小值为 $f(-\frac{b}{2a})$, 最大值为 $f(m), f(n)$ 中的较大者;

② 若 $-\frac{b}{2a} < m$, 则 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 内为增函数, 则最大值为 $f(n)$, 最小值为 $f(m)$;

③ 若 $-\frac{b}{2a} > n$, 则 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 内为减函数, 则最小值为 $f(n)$, 最大值为 $f(m)$.

专题 04 函数与导数

讲高考

1. (高考全国 I 卷理数 6) 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()

A. $y = -2x - 1$

B. $y = -2x + 1$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = 2x + 1$

【答案】B

【解析】 $\because f(x) = x^4 - 2x^3, \therefore f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \therefore f(1) = -1, f'(1) = -2$, 因此, 所求切线的方程为 $y + 1 = -2(x - 1)$, 即 $y = -2x + 1$, 故选 B.

2. (2019 浙江高考) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$. 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰

有 3 个零点, 则

- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$ C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

【答案】C

【解析】当 $x < 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = x - ax - b = (1-a)x - b = 0$, 得 $x = \frac{b}{1-a}$, 则 $y = f(x) - ax - b$ 最多有

一个零点; 当 $x \geq 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}$

$(a+1)x^2 - b, y' = x^2 - (a+1)x$, 当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $y' \geq 0, y = f(x)$

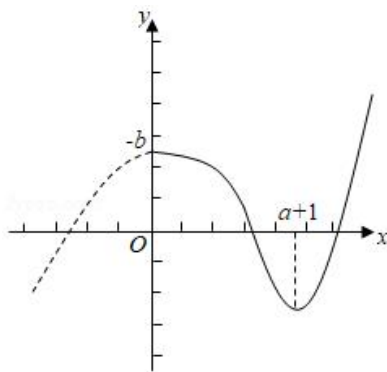
$- ax - b$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $y = f(x) - ax - b$ 最多有一个零点,

不合题意; 当 $a+1 > 0$, 即 $a > -1$ 时, 令 $y' > 0$ 得 $x \in (a+1, +\infty)$, 此时函数

单调递增, 令 $y' < 0$ 得 $x \in [0, a+1)$, 此时函数单调递减, 则函数最多有 2

个零点. 根据题意, 函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x) -$

$ax - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点, 在 $[0, +\infty)$ 上有 2 个零点, 如图:



$\therefore \frac{b}{1-a} < 0$ 且 $\begin{cases} -b > 0 \\ \frac{1}{3}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1)(a+1)^2 - b < 0 \end{cases}$, 解得 $b < 0, 1-a > 0, b > -\frac{1}{6}(a+1)^3$, 则 $a > -1, b < 0$. 故选

C.

3. (2019 年高考天津理数) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在

$\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, e]$ D. $[1, e]$

【答案】C

【解析】当 $x = 1$ 时, $f(1) = 1 - 2a + 2a = 1 > 0$ 恒成立; 当 $x < 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 2a \geq 0 \Leftrightarrow$

$2a \geq \frac{x^2}{x-1}$ 恒成立, 令 $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$, 则 $g(x) = -\frac{x^2}{1-x} = -\frac{(1-x-1)^2}{1-x} = -\frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{1-x}$

$$= -\left(1-x+\frac{1}{1-x}-2\right) \leq -\left(2\sqrt{(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}}-2\right)=0, \text{ 当 } 1-x=\frac{1}{1-x}, \text{ 即 } x=0 \text{ 时取等号, } \therefore 2a \geq g(x)_{\max}=0,$$

则 $a > 0$. 当 $x > 1$ 时, $f(x) = x - a \ln x \geq 0$, 即 $a \leq \frac{x}{\ln x}$ 恒成立, 令 $h(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $h'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 当 $x > e$

时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增, 当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递减, 则 $x = e$ 时, $h(x)$ 取得最小值 $h(e) = e$, $\therefore a \leq h(x)_{\min} = e$, 综上所述, a 的取值范围是 $[0, e]$.

故选 C.

【名师点睛】本题考查分段函数的最值问题, 分别利用基本不等式和求导的方法研究函数的最值, 然后解决恒成立问题.

4. (高考全国 I 卷文数 15) 曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程

为_____.

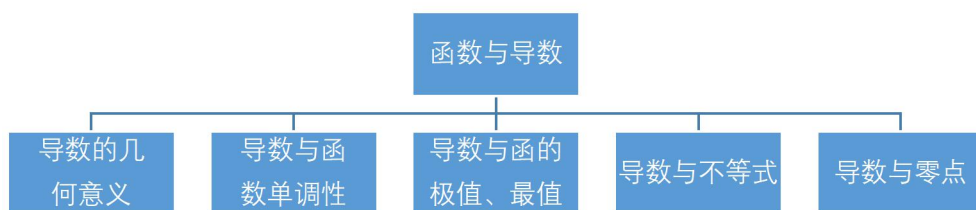
【答案】 $y = 2x$

【解析】设切线的切点坐标为 (x_0, y_0) , $y = \ln x + x + 1$, $y' = \frac{1}{x} + 1$, $y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} + 1 = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$,

$\therefore$ 切点坐标为 $(1, 2)$, 所求的切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x$, 故答案为: $y = 2x$.

讲考向

一、考向分析:



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
导数的几何意义	1. 求切线方程的方法 (1) 求曲线在点 P 处的切线, 则表明 P 点是切点, 只需求出函数在点 P 处的导数, 然后利用点斜式写出切线方程。 (2) 求曲线过点 P 的切线, 则 P 点不一定是切点, 应先设出切点坐标, 然后列出切点坐标的方程解出切点坐标, 进而写出切线方程。

何意义	2. 处理与切线有关的参数问题, 通常根据曲线、切线、切点的三个关系列出参数的方程并解出参数。 (1)切点处的导数是切线的斜率。(2)切点在切线上。(3)切点在曲线上。
导数与函数单调性	1、确定函数单调区间的步骤 (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域。(2) 求 $f'(x)$。 (3) 解不等式 $f'(x)>0$, 解集在定义域内的部分为单调递增区间。 (4) 解不等式 $f'(x)<0$, 解集在定义域内的部分为单调递减区间。 2. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上递增, 则 $f'(x)\geq 0$, “$f'(x)>0$ 在 (a, b) 上成立”是“$f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增”的充分不必要条件。 3、根据函数单调性求参数的一般思路 (1)利用集合间的包含关系处理: $y=f(x)$ 在 (a, b) 上单调, 则区间 (a, b) 是相应单调区间的子集。 (2)$f(x)$ 为增函数的充要条件是对任意的 $x\in(a, b)$ 都有 $f'(x)\geq 0$ 且在 (a, b) 内的任一非空子区间上 $f'(x)$ 不恒为零, 应注意此时式子中的等号不能省略, 否则漏解。 4、划分函数的单调区间时, 要在函数定义域内讨论, 还要确定导数为 0 的点和函数的间断点。 5、个别导数为 0 的点不影响所在区间的单调性, 如 $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2\geq 0$ ($f'(x)=0$ 在 $x=0$ 时取到), $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数。
导数与函数极值、最值	1、函数极值问题的常见类型及解题策略 (1) 知图判断函数极值的情况。先找导数为 0 的点, 再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号。 (2) 已知函数求极值。求 $f'(x)$ → 求方程 $f'(x)=0$ 的根 → 列表检验 $f'(x)$ 在 $f'(x)=0$ 的根的附近两侧的符号 → 下结论。 (3) 已知极值求参数。若函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值, 则 $f'(x_0)=0$, 且在该点左、右两侧的导数值符号相反。 2、求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内的最大值和最小值的思路: 若所给的闭区间 $[a, b]$ 不含有参数, 则只需对函数 $f(x)$ 求导, 并求 $f'(x)=0$ 在区间 $[a, b]$ 内的根, 再计算使导数等于零的根的函数值, 把该函数值与 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值。若所给的闭区间 $[a, b]$ 含有参数, 则需对函数 $f(x)$ 求导, 通过对参数分类讨论, 判断函数的单调性, 从而得到函数 $f(x)$ 的最值。

导数与不等式	1. 利用导数比较大小或解不等式的常用技巧 利用题目条件, 构造辅助函数, 把比较大小或求解不等式的问题转化为先利用导数研究函数的单调性问题, 再由单调性比较大小或解不等式。 2、对于不等式的证明问题可考虑: ①通过研究函数的单调性进行证明; ②根据不等式的结构构造新函数, 通过研究新函数的单调性或最值来证明。有些不等式直接移项、构造函数证明会导致运算量很大, 而先通过化简、变形, 再移项构造不等式就减少运算量, 使得问题顺利解决。 3. 函数中与正整数有关的不等式, 其实质是利用函数性质证明数列不等式, 证明此类问题时常根据已知的函数不等式, 用关于正整数 n 的不等式替代函数不等式中的自变量, 通过多次求和达到证明的目的。此类问题一般至少 2 问, 已知的不等式常由第一问根据待证式的特征而得到。 4. 已知函数式为指数不等式(或对数不等式), 而待证不等式为与对数有关的不等式(或与指数有关的不等式), 还要注意指、对数式的互化, 如 $e^x > x+1$ 可化为 $\ln(x+1) < x$ 等。 5、利用导数研究含参数的不等式问题, 若能够分离参数, 则常将问题转化为形如 $a \geq f(x)$ (或 $a \leq f(x)$) 的形式, 通过求函数 $y=f(x)$ 的最值得参数范围。恒成立问题的求解方法: $a \geq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立, 则 $a \geq f(x)_{\max}(x \in D)$; $a \leq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立, 则 $a \leq f(x)_{\min}$。 6、含全称、存在量词不等式恒成立问题的方法 (1) 存在 $x_1 \in A$, 任意 $x_2 \in B$ 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}$。 (2) 任意 $x_1 \in A$, 存在 $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$。 (3) 任意 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$。 (4) 存在 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \leq g(x)_{\max}$。
导数与零点	1、利用导数确定函数零点或方程根个数的方法 (1) 构造函数 $g(x)$ (要求 $g'(x)$ 易求, $g'(x)=0$ 可解), 转化确定 $g(x)$ 的零点个数问题求解, 利用导数研究该函数的单调性、极值, 并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等, 画出 $g(x)$ 的图象草图, 数形结合求解。 (2) 利用零点存在性定理: 先用该定理判断函数在某区间上有零点, 然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号, 进而判断函数在该区间上零点的个数。 3、与函数零点有关的参数范围问题, 往往利用导数研究函数的单调区间和极值点, 并结合特殊点, 从而判断函数的大致图象, 讨论其图象与 x 轴的位置关系, 进而确定参数的取值范围; 或通过对方程等价变形转化为两个函数图象的交点问题。

考查导数几何意义:

【例 1】(2021·四川云南贵州西藏四省名校一联) 曲线 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 ()

A. $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{2}$

B. $y = \frac{e^2}{4}x$

C. $y = -\frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{2}$

D. $y = -\frac{e^2}{4}x$

【答案】B**【解析】**由题得, $f(2) = \frac{e^2}{2}$, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 则 $f'(2) = \frac{e^2}{4}$, 所以切线方程为 $y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4}(x-2)$,即 $y = \frac{e^2}{4}x$. 故选 B.**【名师点睛】**本题主要考查导数的几何意义, 考查了直线点斜式方程的应用, 属于基础题.**考查导数与函数单调性:****【例 1】**(2021·海南高三一模) 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) - f(x) < 0$, $f(2) = e^2$, 若 $f(t) < e^t$, 则 t 的取值范围为 ()

A. $(0, 2)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(0, e^2)$

D. $(e^2, +\infty)$

【答案】B**【分析】**构造函数 $g(t) = \frac{f(t)}{e^t} - 1$, 得出函数 $g(t)$ 单调递减, 原不等式等价于 $g(t) < g(2)$, 进而可得结果.**【解析】**构造函数 $g(t) = \frac{f(t)}{e^t} - 1$, 则 $g(2) = \frac{f(2)}{e^2} - 1 = 0$. $\because g'(t) = \frac{f'(t) - f(t)}{e^t} < 0$, $\therefore$ 函数 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $\therefore f(t) < e^t \Leftrightarrow g(t) < g(2)$, $\therefore t > 2$, 故选 B.**【名师点睛】**构造新的函数 $g(t)$, 将原不等式等价转化为 $g(t) < g(2)$.**【例 2】**(2021·广西南宁摸底测试) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$, 若 $a = f(2^{0.3})$, $b = f(2)$, $c = f(\log_2 5)$,则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $c > a > b$

D. $b > c > a$

【答案】B**【分析】**求得函数的导数, 根据导数的符号, 得到 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 结合函数的单调性, 即可比较, 得到答案.

【解析】由题意，函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$ ，可得 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + x - 1 = (x-1)\left(\frac{e^x}{x^2} + 1\right)$ ，

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

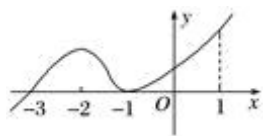
因为 $1 < 2^{0.3} < 2$ ， $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$ ，所以 $2^{0.3} < 2 < \log_2 5$ ，所以 $f(2^{0.3}) < f(2) < f(\log_2 5)$ ，即 $a < b < c$ 。

故选 B。

【名师点睛】本题主要考查了利用导数研究函数的单调性，以及利用单调性比较函数值的大小，其中解答中熟练导数与函数的单调性间的关系是解答的关键，着重考查推理与运算能力。

考查导数与函数极值、最值：

【例 1】(2021·宁夏银川二中高三模拟) 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，给出下列命题：



- ① -3 是函数 $y=f(x)$ 的极值点；
- ② -1 是函数 $y=f(x)$ 的最小值点；
- ③ $y=f(x)$ 在区间 $(-3, 1)$ 上单调递增；
- ④ $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线的斜率小于零。

以上正确命题的序号是()

- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②④

【答案】C

【解析】试题分析：根据导函数图象可判定导函数的符号，从而确定函数的单调性，得到极值点，以及根据导数的几何意义可知在某点处的导数即为在该点处的切线斜率。

根据导函数图象可知：当 $x \in (-\infty, -3)$ 时， $f'(x) < 0$ ，在 $x \in (-3, 1)$ 时， $f'(x) \geq 0$

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递减，在 $(-3, 1)$ 上单调递增，故③正确；

则 -3 是函数 $y=f(x)$ 的极小值点，故①正确；

$\therefore$ 在 $(-3, 1)$ 上单调递增 $\therefore$ -1 不是函数 $y=f(x)$ 的最小值点，故②不正确；

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数大于 0 $\therefore$ 切线的斜率大于零，故④不正确。故选 C。

考点：利用导数研究曲线上某点切线斜率；函数的单调性与导数的关系；函数极值的判定。

【例 2】(2021·云南德宏州联考) 对于正数 k ，定义函数：
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq k \\ k, & f(x) > k \end{cases}$$
 若对函数

$f(x) = \ln 2x - x + 2$, 有 $g(x) = f(x)$ 恒成立, 则 ()

A. k 的最大值为 $1 + \ln 2$

B. k 的最小值为 $1 + \ln 2$

C. k 的最大值为 $\ln 2$

D. k 的最小值为 $\ln 2$

【答案】B

【分析】利用导数求出函数 $f(x)$ 的最大值, 由函数 $g(x)$ 的定义结合 $g(x) = f(x)$ 恒成立可知 $f(x) \leq k$, 由此可得出 k 的取值范围, 进而可得出合适的选项.

【解析】对于正数 k , 定义函数: $g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq k \\ k, & f(x) > k \end{cases}$, 且 $g(x) = f(x)$ 恒成立, 则 $f(x) \leq k$.

函数 $f(x) = \ln 2x - x + 2$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时, 函数 $f(x)$ 单调递减.

所以, $f(x)_{\max} = f(1) = 1 + \ln 2$, $\therefore k \geq 1 + \ln 2$. 因此, k 的最小值为 $1 + \ln 2$. 故选 B.

【名师点睛】解决导数中的新定义的问题, 要紧扣新定义的本质, 将问题转化为导数相关的问题, 本题将问题转为不等式 $k \geq f(x)$ 恒成立, 从而将问题转化为求函数 $f(x)$ 的最大值.

考查导数与不等式:

【例 1】已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$, 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;

【解析】令 $g(x) = f(x) - x, x \in [-2, 4]$. 由 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ 得 $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$.

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{8}{3}$. $g'(x), g(x)$ 的情况如下:

x	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3}, 4)$	4
$g'(x)$		+		-		+	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6 , 最大值为 0 . 故 $-6 \leq g(x) \leq 0$, 即 $x - 6 \leq f(x) \leq x$.

【名师点睛】本题主要考查利用导函数研究函数的切线方程, 利用导函数证明不等式, 分类讨论的数学思想等知识, 意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

【例 2】(2021·江西赣州十六校期中联考) 已知函数 $f(x) = a^x + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) - x\ln a$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 对

任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不等式 $|f(x_2) - f(x_1)| \leq a - 2$ 恒成立, 则实数 a 的最小值是 ()

- A. e^2 B. e C. 3 D. 2

【答案】A

【分析】由导数求得 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 求得函数的最值, 把任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不等式

$|f(x_2) - f(x_1)| \leq a - 2$ 恒成立, 转化为 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq a - 2$, 进而求得 a 的取值范围, 得到最小值.

【解析】由题意, 显然 $a \geq 2$,

因为函数 $f(x) = a^x + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) - x\ln a$, 可得 $f'(x) = \ln a(a^x - 1) + \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$,

又由 $x \in [0, 1], a \geq 2$, 可得 $\ln a > 0, a^x - 1 \geq 0, \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) > 0$, 故 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

故 $f(x)_{\max} = f(1) = a + 1 - \ln a, f(x)_{\min} = f(0) = 1$,

对任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不等式 $|f(x_2) - f(x_1)| \leq a - 2$ 恒成立, 即 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq a - 2$,

所以 $a + 1 - \ln a - 1 \leq a - 2$, 即 $\ln a \geq 2$, 解得 $a \geq e^2$, 即实数 a 的最小值为 e^2 . 故选 A.

【名师点睛】

对于利用导数研究不等式的恒成立问题的求解策略:

1、通常要构造新函数, 利用导数研究函数的单调性, 求出最值, 从而求出参数的取值范围; 2、利用可分离变量, 构造新函数, 直接把问题转化为函数的最值问题.

考查导数与零点

【例 1】(2021·烟台福山区高三期中) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & 1 < x \leq 3 \\ \ln \frac{x}{3}, & 3 < x \leq 9 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有两个不

同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[\frac{\ln 3}{9}, \frac{1}{3e}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$
C. $\left[\frac{1}{3e}, \frac{\ln 3}{9}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ D. $\left(0, \frac{\ln 3}{9}\right) \cup \left\{\frac{1}{3e}\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right)$

【答案】D

【分析】函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有两个不同的零点等价于方程 $a = \frac{f(x)}{x}$ 有两个不同的根，即可得答案；

【解析】函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有两个不同的零点等价于方程 $a = \frac{f(x)}{x}$ 有两个不同的根，

$$\therefore \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & 1 < x \leq 3, \\ \frac{\ln \frac{x}{3}}{x}, & 3 < x \leq 9, \end{cases}, \text{ 令 } u(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}, \therefore u'(x) = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right)' = \frac{-x+2}{2x^2\sqrt{x-1}},$$

$u'(x) > 0 \Rightarrow 1 < x < 2, u'(x) < 0 \Rightarrow 2 < x < 3, \therefore u(x)$ 在 $(1, 2)$ 递增，在 $(2, 3)$ 递减，

$$\therefore u(1) = 0, u(2) = \frac{1}{2}, u(3) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \therefore u(x) \in (0, \frac{\sqrt{2}}{3}],$$

$$\text{令 } v(x) = \frac{\ln \frac{x}{3}}{x} = \frac{\ln \frac{x}{3}}{3 \times \frac{x}{3}}, \quad 3 < x \leq 9, \text{ 令 } t = \frac{x}{3}, \text{ 则 } y = v(x) = \frac{1}{3} \frac{\ln t}{t}, \quad 1 < t \leq 3,$$

$$\therefore y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \ln t}{t^2}, \text{ 当 } y' = 0 \Rightarrow t = e, \quad y' > 0 \Rightarrow 1 < t < e, \quad y' < 0 \Rightarrow e < t < 3,$$

$$\therefore y \text{ 在 } (1, e) \text{ 递增，在 } (e, 3) \text{ 递减，且 } y(1) = 0, y(e) = \frac{1}{3e}, y(3) = \frac{\ln 3}{9}, \therefore v(x) \in (0, \frac{1}{3e}],$$

$$\text{所以直线 } y = a \text{ 与 } \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & 1 < x \leq 3, \\ \frac{\ln \frac{x}{3}}{x}, & 3 < x \leq 9, \end{cases} \text{ 有两个交点，可得 } a \text{ 的取值范围为: } \left(0, \frac{\ln 3}{9}\right) \cup \left\{\frac{1}{3e}\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

故选 D.

【名师点睛】利用函数零点的情况求参数值或取值范围的方法：

- (1) 利用零点存在的判定定理构建不等式求解.
- (2) 分离参数后转化为函数的值域(最值)问题求解.
- (3) 转化为两熟悉的函数图象问题，从而构建不等式求解.

讲题型

不等式型双变量存在性或任意性问题

1. 形如“对任意 $x_1 \in A$ ，都存在 $x_2 \in B$ ，使得 $g(x_2) = f(x_1)$ 成立”。

此种类型的“等价转化”策略是利用“ $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 的值域的子集”来求解参数的取值范围。

【典例 1】已知函数 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-a(a+2)x$, $g(x)=\frac{19}{6}x-\frac{1}{3}$, 若对任意 $x_1 \in [-1,1]$, 总存在 $x_2 \in [0,2]$, 使得 $f'(x_1)+2ax_1=g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围。

【解】由题意知, $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{1}{3}, 6\right]$, 令 $h(x)=f'(x)+2ax=3x^2+2x-a(a+2)$, 则 $h'(x)=6x+2$, 由 $h'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{3}$ 。当 $x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$ 时, $h'(x)<0$; 当 $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ 时, $h'(x)>0$, 所以 $[h(x)]_{\min}=h\left(-\frac{1}{3}\right)=-a^2-2a-\frac{1}{3}$ 。又由题意可知, $h(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{3}, 6\right]$ 的子集, 所以 $\begin{cases} h & -1 \leq 6, \\ -a^2-2a-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}, \\ h & 1 \leq 6, \end{cases}$ 解得

实数 a 的取值范围是 $[-2,0]$ 。

2. 形如“存在 $x_1 \in A$ 及 $x_2 \in B$, 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立”

此种类型的“等价转化”策略是利用“ $f(x)$ 的值域和 $g(x)$ 的值域的交集不为空集”来求解参数的取值范围。

【典例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{2x^3}{x+1}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ -\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$ 函数 $g(x)=k\sin\frac{\pi x}{6}-2k+2(k>0)$, 若存在 $x_1 \in [0,1]$ 及

$x_2 \in [0,1]$, 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围。

【解】由题意, 易得函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,1]$, $g(x)$ 的值域为 $\left[2-2k, 2-\frac{3k}{2}\right]$, 并且两个值域有公共部分。先求没有公共部分的情况, 即 $2-2k>1$ 或 $2-\frac{3k}{2}<0$, 解得 $k<\frac{1}{2}$ 或 $k>\frac{4}{3}$, 所以, 要使两个值域有公共部分,

k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ 。

3. 形如“对任意 $x_1 \in A$ 及 $x_2 \in B$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立”

此种类型的“等价转化”策略是利用“ $[f(x)]_{\max} \leq [g(x)]_{\min}$ ”或分离参数的办法来求解参数的取值范围。

【典例 3】已知函数 $f(x)=8x^2+16x-k$, $g(x)=2x^3+5x^2+4x$, 若对于任意 $x_1 \in [-3,3]$, $x_2 \in [-3,3]$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围。

【解】解法一: 因为不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 的左右两端函数的自变量不同, x_1 与 x_2 在 $[-3,3]$ 内的取值具有任意性, 所以使不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立的充要条件是 $[f(x)]_{\max} \leq [g(x)]_{\min}$ 。因为 $f(x)=8(x+1)^2-k-8$, 所以 $[f(x)]_{\max}=f(3)=120-k$ 。又因为 $g'(x)=6x^2+10x+4=(3x+2) \cdot (2x+2)$, 由 $g'(x)=0$ 得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 -1 , $g(-3)=-21$, $g(-1)=-1$, $g\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{28}{27}$, $g(3)=111$, 所以 $[g(x)]_{\min}=-21$, 由 $120-k \leq -21$, 解得 k 的取值范围是 $[141, +\infty)$ 。

解法二: 令 $\varphi(x)=8x^2+16x$, 则对于任意 $x_1 \in [-3,3]$, $x_2 \in [-3,3]$, 都有 $\varphi(x_1)-k \leq g(x_2)$ 成立, 故 $k \geq [\varphi(x)]_{\max} - [g(x)]_{\min} = 120 - (-21) = 141$, 即 k 的取值范围是 $[141, +\infty)$ 。

4. 形如“存在 $x_1 \in A$ 及 $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立”

此种类型的“等价转化”策略是利用“ $[f(x)]_{\min} < [g(x)]_{\max}$ ”或分离参数的办法来求解参数的取值范围。

【典例 4】 已知函数 $f(x) = 7x^2 - 28x - a$, $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 40x$, 如果存在 $x_1 \in [-3, 3]$, $x_2 \in [-3, 3]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 能成立, 求实数 a 的取值范围。

【解】解法一: 由题意知, $[f(x)]_{\min} \leq [g(x)]_{\max}$ 。因为 $f(x) = 7(x-2)^2 - a - 28$, 所以 $[f(x)]_{\min} = f(2) = -a - 28$ 。又因 $g'(x) = 6x^2 + 8x - 40 = (6x+20)(x-2)$, 由 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$ 或 $-\frac{10}{3}$ (舍去), $g(-3) = 102$, $g(2) = -48$, $g(3) = -30$, 所以 $[g(x)]_{\max} = 102$ 。由 $-a - 28 \leq 102$ 解得 a 的取值范围是 $[-130, +\infty)$ 。

解法二: 令 $\varphi(x) = 7x^2 - 28x$, 存在 $x_1 \in [-3, 3]$, $x_2 \in [-3, 3]$, 使 $\varphi(x_1) - a \leq g(x_2)$ 成立, 故 $a \geq [\varphi(x)]_{\min} - [g(x)]_{\max} = -28 - 102 = -130$ 。即 a 的取值范围是 $[-130, +\infty)$ 。

 5. 形如“对任意 $x_1 \in A$, 都存在 $x_2 \in B$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立”

此种类型的“等价转化”策略是利用“ $[f(x)]_{\max} < [g(x)]_{\max}$ ”或分离参数的办法来求解参数的取值范围。

【典例 5】 已知函数 $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$, $g(x) = \frac{6a^2}{x+a} \left[a > \frac{1}{3} \right]$, 若对任意的 $x_0 \in [0, a]$, 总存在相应的 $x_1 \in [0, a]$, $x_2 \in [0, a]$, 使得 $g(x_1) \leq f(x_0) \leq g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围。

【解】由题意知, $f(x) = \frac{-3x-1}{x^2+1} \cdot \frac{x+3}{2}$ 。令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3}$ 或 -3 (舍去)。当 $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in \left[\frac{1}{3}, a\right]$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $[f(x)]_{\max} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$ 。又 $f(0) = 4$, $f(a) = \frac{3a+4}{a^2+1}$, $f(a) - f(0) = \frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{3-4a}{a^2+1}$,

所以, 当 $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{4}$ 时, $[f(x)]_{\min} = f(0) = 4$, 当 $a \geq \frac{3}{4}$ 时, $[f(x)]_{\min} = f(a) = \frac{3a+4}{a^2+1}$ 。因为 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调递减,

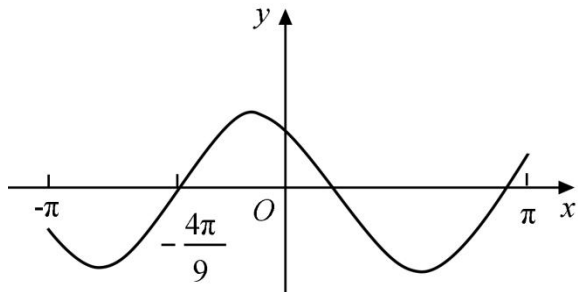
所以 $[g(x)]_{\min} = g(a) = 3a$, $[g(x)]_{\max} = g(0) = 6a$ 。由题意知, 只需在区间 $[0, a]$ 上 $[f(x)]_{\max} \leq [g(x)]_{\max}$,

$[f(x)]_{\min} \geq [g(x)]_{\min}$, 即 $\begin{cases} \frac{9}{2} \leq 6a, \\ 4 \geq 3a, \\ \frac{1}{3} < a < \frac{3}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{9}{2} \leq 6a, \\ a \geq \frac{3}{4}, \\ \frac{3a+4}{a^2+1} \geq 3a, \end{cases}$ 解得 $a \in \emptyset$ 或 $\frac{3}{4} \leq a \leq \left[\frac{4}{3}\right]_1$, 故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, \left[\frac{4}{3}\right]_1\right]$ 。

专题 05 三角函数与解三角

讲高考

1. 【高考全国 I 卷文理数 7】 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()



- A. $\frac{10\pi}{9}$ B. $\frac{7\pi}{6}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】由图可得：函数图像过点 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$ ，将它代入函数 $f(x)$ 可得： $\cos\left(-\frac{4\pi}{9} \cdot \omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，

又 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图像与 x 轴负半轴的第一个交点， $\therefore -\frac{4\pi}{9} \cdot \omega + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ ，解得： $\omega = \frac{3}{2}$ ， $\therefore$ 函数

$f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$ ，故选 C.

2. 【高考全国 I 卷理数 9】 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，且 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$ ，则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$ ，得 $6\cos^2 \alpha - 8\cos \alpha - 8 = 0$ ，即 $3\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 4 = 0$ ，解得 $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$

或 $\cos \alpha = 2$ (舍去)，又 $\because \alpha \in (0, \pi)$ ， $\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，故选 A.

3. 【高考全国 II 卷理数 2】 若 α 为第四象限角，则 ()

- A. $\cos 2\alpha > 0$ B. $\cos 2\alpha < 0$ C. $\sin 2\alpha > 0$ D. $\sin 2\alpha < 0$

【答案】D

【解析】当 $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ 时， $\cos 2\alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$ ，选项 B 错误；当 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ 时， $\cos 2\alpha = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0$ ，

选项 A 错误；由 α 在第四象限可得： $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ ，则 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha < 0$ ，选项 C 错误，选项 D 正确，故选：D.

4. 【高考全国III卷文数 5】已知 $\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ，则 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】由题意可得： $\sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = 1$ ，则： $\frac{3}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = 1$ ， $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

从而有： $\sin \theta \cos \frac{\pi}{6} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。故选：B.

5. 【高考全国III卷文数 11】在 $\triangle ABC$ 中， $\cos C = \frac{2}{3}$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，则 $\tan B =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $8\sqrt{5}$

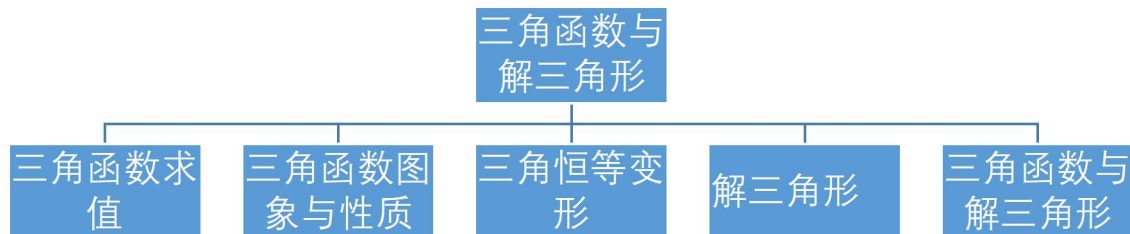
【答案】C

【解析】设 $AB = c, BC = a, CA = b$ ， $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{2}{3} = 9 \therefore c = 3$ ，

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{9} \therefore \sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \therefore \tan B = 4\sqrt{5}$ ，故选：C.

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
	三角函数求值的 3 类求法
	1. “给值求值”：给出某些角的三角函数式的值，求另外一些角的三角函数值，解题关键

三角函数求值	在于“变角”，使其角相同或具有某种关系。 2. “给角求值”：一般所给出的角都是非特殊角，从表面上来看是很难的，但仔细观察非特殊角与特殊角总有一定关系，解题时，要利用观察得到的关系，结合公式转化为特殊角并且消除非特殊角的三角函数而得解。 3. “给值求角”：实质是转化为“给值求值”，先求角的某一函数值，再求角的范围，最后确定角。
三角恒等变形	三角恒等变形时，要注意三看：角、名、形 1. 角：观察角之间的关系，如$\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$，$\frac{\alpha}{2} = 2 \left[\frac{\alpha}{4} \right]$等，通过观察角之间的差别与联系，把角进行合理的拆分与组合，从而正确使用公式。 2. 名：观察三角函数的名称之间的关系，如$\sin \alpha$，$\cos \alpha$，$\tan \alpha$的关系，常常要用到同角关系、诱导公式。通过观察函数名称之间的关系，确定使用的公式，常见的有“切化弦”“弦化切”等。 3. 形：观察已知与未知的表达式之间的关系，主要是公式的变形应用。分析表达式的结构特征，寻求变形的方向，迅速准确地使用公式。
三角函数图象与性质	1. 已知三角函数解析式求单调区间：①求函数的单调区间应遵循简单化原则，将解析式先化简，并注意复合函数单调性规律“同增异减”；②求形如$y = A\sin(\omega x + \varphi)$或$y = A\cos(\omega x + \varphi)$(其中$\omega > 0$)的单调区间时，要视“$\omega x + \varphi$”为一个整体，通过解不等式求解。但如果$\omega < 0$，那么一定先借助诱导公式将$\omega$化为正数，防止把单调性弄错。 2. 三角函数的奇偶性、对称性和周期问题的解题思路 (1) 奇偶性的判断方法：三角函数中奇函数一般可化为$y = A\sin \omega x$或$y = A\tan \omega x$的形式，而偶函数一般可化为$y = A\cos \omega x + b$的形式。 (2) 周期的计算方法：利用函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$，$y = A\cos(\omega x + \varphi)$($\omega > 0$)的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，函数$y = A\tan(\omega x + \varphi)$($\omega > 0$)的周期为$\frac{\pi}{\omega}$求解。 (3) 对于函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$，其对称轴一定经过图象的最高点或最低点，对称中心的横坐标一定是函数的零点，因此在判断直线$x = x_0$或点$(x_0, 0)$是否是函数的对称轴或对称中心时，可通过检验$f(x_0)$的值进行判断。 3. 图象变换注意事项： (1) 由$y = \sin \omega x$到$y = \sin(\omega x + \varphi)$的变换：向左平移$\frac{\varphi}{\omega}$($\omega > 0$，$\varphi > 0$)个单位长度而非$\varphi$个单位长度。 (2) 平移前后两个三角函数的名称如果不一致，应先利用诱导公式化为同名函数，ω为负时应先变成正值。

	4. 确定 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$ 的解析式的步骤 (1) 求 A, B, 确定函数的最大值 M 和最小值 m, 则 $A = \frac{M-m}{2}, B = \frac{M+m}{2}$. (2) 求 ω, 确定函数的周期 T, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T}$. (3) 求 φ, 常用方法有: ①代入法: 把图象上的一个已知点代入(此时要注意该点在上升区间上还是在下降区间上)或把图象的最高点或最低点代入. ②五点法: 确定 φ 值时, 往往以寻找“五点法”中的特殊点作为突破口.
解三角形	1. 解三角形即求三角形中的一些基本量, 主要指求三角形的三边、三角等, 它的实质是将几何问题转化为代数问题, 解题关键是正确分析边角关系, 依据题设条件合理地设计解题步骤, 利用三角形内角和定理、正弦定理及余弦定理等工具进行边角关系的互化. 2. 判断三角形形状主要有以下两种途径 (1)通过正弦定理和余弦定理, 化边为角, 利用三角变换得出三角形内角之间的关系进行判断. (2)利用正弦定理、余弦定理, 化角为边, 通过代数恒等变换, 求出三条边之间的关系进行判断. 3. 三角形面积公式的应用原则 (1)对于面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$, 一般是已知哪一个角就使用哪一个公式. (2)与面积有关的问题, 一般要运用到正弦定理或余弦定理进行边和角的转化.
三角函数与解三角形	1、利用正、余弦定理解决平面几何问题的一般思路 (1) 把所提供的平面图形拆分成若干个三角形, 然后在各个三角形内利用正弦、余弦定理求解. (2) 寻找各个三角形之间的联系, 交叉使用公共条件, 求出结果. 做题过程中, 要运用到平面几何中的一些知识点, 如相似三角形的边角关系、平行四边形的一些性质, 要把这些性质与正弦、余弦定理有机结合, 才能顺利解决问题. 2、解三角形问题中, 求解某个量(式子)的取值范围是命题的热点, 其主要解决思路是: 要建立所求量(式子)与已知角或边的关系, 然后把角或边作为自变量, 所求量(式子)的值作为函数值, 转化为函数关系, 将原问题转化为求函数的值域问题. 这里要利用条件中的范围限制, 以及三角形自身范围限制, 要尽量把角或边的范围(也就是函数的定义域)找完善, 避免结果的范围过大.

考查三角函数求值:

【例 1】(2021·福建福州一中高三开学考试) 已知角 α 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴正半轴重合, 终边经过点 $(1, -2)$, 则 $\tan 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】因为角 α 的终边经过点 $(1, -2)$ ，由三角函数定义可得 $\tan \alpha = \frac{-2}{1} = -2$ ，根据正切的二倍角

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \text{ 代入可得 } \tan 2\alpha = \frac{2 \times (-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}, \text{ 故选 D.}$$

【例 2】已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} = -1$ ，求下列各式的值：(1) $\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ ；(2) $\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 2$ 。

【答案】 $-\frac{5}{3}$; $\frac{13}{5}$

【解析】由已知得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 。

$$(1) \frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 3}{\tan \alpha + 1} = -\frac{5}{3}.$$

$$(2) \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 2 = \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} + 2 = \frac{\tan^2 \alpha + \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} + 2 = \frac{13}{5}.$$

【例 3】已知 $x \in (-\pi, 0)$ ， $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ 。

(1) 求 $\sin x - \cos x$ 的值。(2) 求 $\frac{\sin 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \tan x}$ 的值。

【答案】 $-\frac{7}{5}$; $-\frac{24}{175}$ 。

【解析】(1) 由 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ ，平方得 $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}$ ，整理得 $2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25}$ 。

所以 $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{49}{25}$ 。由 $x \in (-\pi, 0)$ ，知 $\sin x < 0$ ，又 $\sin x + \cos x > 0$ ，

所以 $\cos x > 0$ ，则 $\sin x - \cos x < 0$ ，故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$ 。

$$(2) \frac{\sin 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \tan x} = \frac{2 \sin x \cos x + \sin x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \sin x \cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = -\frac{24}{175}.$$

【例 4】(2021·四川遂宁·高三零模(文)) 已知 $1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ，则 $\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【分析】根据诱导公式以及两角和的正弦公式先化简原式，计算出 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值，然后根据同角三角函数的关系求解出 $\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

【解析】因为 $1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ，所以 $1 - \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \sin\theta$ ，

所以 $\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 1$ ，所以 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，故选

C.

【名师点睛】解答本题的关键是熟练掌握诱导公式以及三角恒等变换的公式、同角三角函数的基本关系。考查三角恒等变形：

【例 1】【2019 年高考江苏卷】已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2}{3}$ ，则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值是 ▲ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】由 $\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\tan\alpha}{\frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha}} = \frac{\tan\alpha(1 - \tan\alpha)}{\tan\alpha + 1} = -\frac{2}{3}$ ，得 $3\tan^2\alpha - 5\tan\alpha - 2 = 0$ ，

解得 $\tan\alpha = 2$ ，或 $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ 。 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\sin\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\tan\alpha + 1 - \tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 1} \right),$$

当 $\tan\alpha = 2$ 时，上式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{2 \times 2 + 1 - 2^2}{2^2 + 1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ；

当 $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ 时，上式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left[\frac{2 \times (-\frac{1}{3}) + 1 - (-\frac{1}{3})^2}{(-\frac{1}{3})^2 + 1} \right] = \frac{\sqrt{2}}{10}$ 。综上所述， $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ 。

【名师点睛】本题考查三角函数的化简求值，渗透了逻辑推理和数学运算素养。采取转化法，利用分类讨论和转化与化归思想解题。由题意首先求得 $\tan\alpha$ 的值，然后利用两角和的正弦公式和二倍角公式将原问题转化为

齐次式求值的问题，最后切化弦求得三角函数式的值即可.

考查三角函数图像与性质：

【例 1】(2021·广西南宁二中高三月考(文)) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x + 1$ ，则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π ，最大值为 3 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π ，最大值为 4
C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，最大值为 3 D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，最大值为 4

【答案】B

【解析】由题 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x + 1 = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 2 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 2$ ，

$\therefore$ 最大值为 4， $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故选 B.

【名师点睛】本题考查了三角变换及三角函数的图象与性质，解题的关键是化成正弦型函数的标准形式.

【例 2】(2021·黑龙江大庆实验中学高三月考(理)) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，

$f(\alpha) = -1$ ， $f(\beta) = 1$ ，若 $|\alpha - \beta|$ 的最小值 $\frac{3\pi}{4}$ ，且 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 对称，则函数 $f(x)$ 的所有对

称轴中，离原点最近的对称轴方程为 ()

- A. $x = -\frac{3\pi}{4}$ B. $x = \frac{\pi}{4}$ C. $x = -\frac{\pi}{2}$ D. $x = \frac{\pi}{12}$

【答案】C

【分析】根据 $f(\alpha) = -1$ ，可得 $\omega\alpha + \varphi = 2k_1\pi - \frac{\pi}{2}$ ， $k_1 \in \mathbb{Z}$ ，根据 $f(\beta) = 1$ ，可得 $\omega\beta + \varphi = k_2\pi$ ， $k_2 \in \mathbb{Z}$ ，

可得 $|\omega(\alpha - \beta)| = |(2k_1 - k_2)\pi - \frac{\pi}{2}| \geq \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{3\pi}{4}$ ，所以 $\omega = \frac{2}{3}$ ，根据 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 对称，

可得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，再求出函数 $f(x)$ 的所有对称轴，从而可得答案.

【解析】因为 $f(\alpha) = -1$ ，所以 $\sin(\omega\alpha + \varphi) = -1$ ，所以 $\omega\alpha + \varphi = 2k_1\pi - \frac{\pi}{2}$ ， $k_1 \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $f(\beta) = 1$ ，所以 $\sin(\omega\beta + \varphi) = 0$ ，所以 $\omega\beta + \varphi = k_2\pi$ ， $k_2 \in \mathbb{Z}$ ，

所以 $\omega(\alpha - \beta) = (2k_1 - k_2)\pi - \frac{\pi}{2}$ ， $k_1 \in \mathbb{Z}$ ， $k_2 \in \mathbb{Z}$ ，

所以 $|\omega(\alpha - \beta)| = |(2k_1 - k_2)\pi - \frac{\pi}{2}| \geq \frac{\pi}{2}$ ，当且仅当 $2k_1 - k_2 = 0$ 或 $2k_1 - k_2 = 1$ 时，等号成立，

因为 $\omega > 0$ ，所以 $|\alpha - \beta| \geq \frac{\pi}{2\omega}$ ，所以 $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{3\pi}{4}$ ，所以 $\omega = \frac{2}{3}$.

又 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 对称, 所以 $\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} + \varphi = k\pi$, $k \in Z$, 所以 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 由 $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = k_3\pi + \frac{\pi}{2}$, $k_3 \in Z$,

得 $x = \frac{3}{2}k_3\pi + \pi$, $k_3 \in Z$, 所以 $|x - 0| = \left|\frac{3}{2}k_3\pi + \pi\right| \geq \left|-\frac{3}{2}\pi + \pi\right| = \frac{\pi}{2}$, 当且仅当 $k_3 = -1$ 时, 等号成立,

所以函数 $f(x)$ 的所有对称轴中, 离原点最近的对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{2}$, 故选 C.

考查解三角形:

【例 1】 (高考全国 I 卷文数 18) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $B = 150^\circ$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}c$, $b = 2\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin A + \sqrt{3} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 C .

【答案】 (1) $\sqrt{3}$; (2) 15° .

【思路导引】 (1) 已知角 B 和 b 边, 结合 a, c 关系, 由余弦定理建立 c 的方程, 求解得出 a, c , 利用面积公式, 即可得出结论; (2) 将 $A = 30^\circ - C$ 代入已知等式, 由两角差的正弦和辅助角公式, 化简得出有关 C 角的三角函数值, 结合 C 的范围, 即可求解.

【解析】 (1) 由余弦定理可得 $b^2 = 28 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 150^\circ = 7c^2$,

$\therefore c = 2, a = 2\sqrt{3}, \therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{3}$.

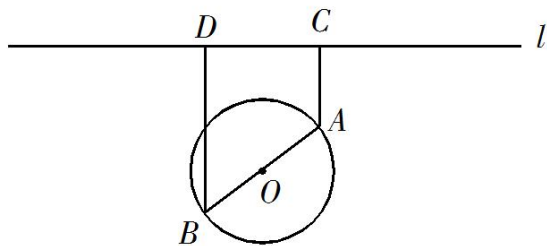
(2) $\because A + C = 30^\circ$,

$\therefore \sin A + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ - C) + \sqrt{3} \sin C = \frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C = \sin(C + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because 0^\circ < C < 30^\circ, \therefore 30^\circ < C + 30^\circ < 60^\circ, \therefore C + 30^\circ = 45^\circ, \therefore C = 15^\circ$.

【专家解读】 本题的特点是注重基础, 本题考查了余弦定理、三角恒等变换解三角形, 考查数学运算学科素养. 解题关键是熟记有关公式.

【例 2】 如图, 一个湖的边界是圆心为 O 的圆, 湖的一侧有一条直线型公路 l , 湖上有桥 AB (AB 是圆 O 的直径). 规划在公路 l 上选两个点 P, Q , 并修建两段直线型道路 PB, QA . 规划要求: 线段 PB, QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A, B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD (C, D 为垂足), 测得 $AB = 10, AC = 6$,



$BD=12$ (单位: 百米).

(1) 若道路 PB 与桥 AB 垂直, 求道路 PB 的长;

(2) 在规划要求下, P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处? 并说明理由;

【答案】(1) 15 (百米); (2) 见解析;

【解析】(1) 过 A 作 $AE \perp BD$, 垂足为 E . 由已知条件得, 四边形 $ACDE$ 为矩形,

$$DE = BE = AC = 6, AE = CD = 8. \text{ 因为 } PB \perp AB, \text{ 所以 } \cos \angle PBD = \sin \angle ABE = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{所以 } PB = \frac{BD}{\cos \angle PBD} = \frac{12}{\frac{4}{5}} = 15. \text{ 因此道路 } PB \text{ 的长为 } 15 \text{ (百米).}$$

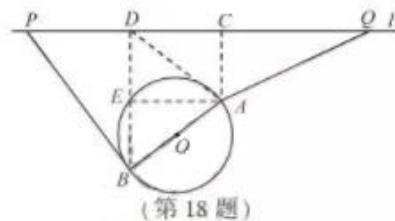
(2) ①若 P 在 D 处, 由 (1) 可得 E 在圆上, 则线段 BE 上的点 (除 B, E) 到点 O 的距离均小于圆 O 的半径, 所以 P 选在 D 处不满足规划要求.

②若 Q 在 D 处, 连结 AD , 由 (1) 知 $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = 10$,

$$\text{从而 } \cos \angle BAD = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2AD \cdot AB} = \frac{7}{25} > 0, \text{ 所以 } \angle BAD \text{ 为}$$

锐角. 所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径. 因此, Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上, P 和 Q 均不能选在 D 处.



考查解三角形与三角函数

【例 1】(2021·四川遂宁·高三零模 (理)) 已知函数 $f(x) = 4 \sin x \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 - \sqrt{3}$.

(1) 若关于 x 的方程 $f(x) - m - \sqrt{3} = 0$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有解, 求实数 m 的取值范围;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 满足 $f(A) = \sqrt{3} + 1$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, 求 BC 边上的高 AD 长的最大值.

【答案】(1) $[1, 3 - \sqrt{3}]$; (2) $\sqrt{6}$.

【分析】(1) 利用三角恒等变换思想化简函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 求出函数 $f(x)$ 在

区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域, 可得出关于实数 m 的不等式, 由此可解得实数 m 的取值范围;

(2) 由 $f(A) = \sqrt{3} + 1$ 结合角 A 的取值范围可求得角 A 的值, 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ 可得出 $A = \frac{\pi}{3}$, $bc = 8$, 利用

余弦定理结合基本不等式可求得 $a \geq 2\sqrt{2}$, 再利用三角形的面积公式可求得 AD 长的最大值.

【解析】(1) $\because f(x) = 4\sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 - \sqrt{3} = 4\sin x \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + 1 - \sqrt{3}$

$$= 2\sin x \cos x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + 1 - \sqrt{3} = \sin 2x + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 1 - \sqrt{3}$$

$$= 1 + \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

又 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 则 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为

$[\sqrt{3} + 1, 3]$, 由 $f(x) - m - \sqrt{3} = 0$ 可得 $f(x) = m + \sqrt{3}$, 所以 $m + \sqrt{3} \in [\sqrt{3} + 1, 3]$, 即 $m \in [1, 3 - \sqrt{3}]$.

(2) 由 $f(A) = \sqrt{3} + 1$, 即 $2\sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \sqrt{3} + 1$, 可得 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because 0 < A < \pi$, $\therefore -\frac{\pi}{3} < 2A - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$, 则 $2A - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ 或 $2A - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 解得 $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, 即 $bc \cos A = 4$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$, 则 $bc = 8$,

由余弦定理, 得 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{2bc - bc} = 2\sqrt{2}$,

由三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}a \cdot AD$, 即 $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a \cdot AD$. 所以 $AD \leq \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.

所以 BC 边上的高 AD 长的最大值为 $\sqrt{6}$.

【名师点睛】求函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $[a, b]$ 上值域的一般步骤:

第一步: 三角函数式的化简, 一般化成形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ 的形式或 $y = A\cos(\omega x + \varphi) + k$ 的形式.

第二步: 由 x 的取值范围确定 $\omega x + \varphi$ 的取值范围, 再确定 $\sin(\omega x + \varphi)$ (或 $\cos(\omega x + \varphi)$) 的取值范围;

第三步: 求出所求函数的值域 (或最值).

讲题型

三角函数中有关参数 ω 的求解问题

三角函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (或 $g(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$) 的参数有好几个, 但其中 ω 的求解最为复杂。

一、三角函数的周期 T 与 ω 的关系

【例 1】为了使函数 $y=\sin\omega x (\omega>0)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少出现 50 次最大值, 则 ω 的最小值为()

- A. 98π B. $\frac{197}{2}\pi$ C. $\frac{199}{2}\pi$ D. 100π

【答案】B

【解析】由题意, 至少出现 50 次最大值即至少需用 $49\frac{1}{4}$ 个周期, 所以 $49\frac{1}{4}T=\frac{197}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leq 1$, 所以 $\omega\geq\frac{197}{2}\pi$,

二、三角函数的单调性与 ω 的关系

【例 2】若函数 $f(x)=\sin\omega x (\omega>0)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是()

- A. $[0, \frac{2}{3}]$ B. $[0, \frac{3}{2}]$ C. $[\frac{2}{3}, 3]$ D. $[\frac{3}{2}, 3]$

【答案】C

【解析】令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\omega x\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi (k\in\mathbb{Z})$, 得 $\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leq x\leq\frac{3\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$, 因为 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 所以

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leq\frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{2}\leq\frac{3\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}, \end{cases} \quad \text{得: } 6k+\frac{3}{2}\leq\omega\leq 4k+3. \text{ 又 } \omega>0, \text{ 所以 } k\geq 0, \text{ 又 } 6k+\frac{3}{2}<4k+3, \text{ 得 } 0\leq k<\frac{3}{4}, \text{ 所以 } k=0. \text{ 即 } \frac{3}{2}\leq\omega\leq 3.$$

三、三角函数最值与 ω 的关系

【例 3】已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 -2 , 求 ω 的取值范围。

【答案】 $(-\infty, -2]\cup[\frac{3}{2}, +\infty)$ 。

【解析】显然 $\omega\neq 0$ 。

若 $\omega>0$, 当 $x\in[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $-\frac{\pi}{3}\omega\leq\omega x\leq\frac{\pi}{4}\omega$, 因为函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 -2 , 所以

$$-\frac{\pi}{3}\omega\leq-\frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \omega\geq\frac{3}{2}.$$

若 $\omega<0$, 当 $x\in[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $\frac{\pi}{4}\omega\leq\omega x\leq-\frac{\pi}{3}\omega$, 因为函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 -2 , 所以 $\frac{\pi}{4}\omega\leq$

$$-\frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \omega\leq-2.$$

综上所述, 符合条件的实数 ω 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

专题 06 平面向量

讲高考

1. 【高考全国 II 卷文数 5】已知单位向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 60° , 则在下列向量中, 与 $\mathbf{b}$ 垂直的是 ()

A. $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

B. $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$

C. $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

D. $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$

【答案】D

【思路导引】根据平面向量数量积的定义、运算性质, 结合两平面向量垂直数量积为零这一性质逐一判断即可.

【解析】由已知可得: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

A: $\because (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b}^2 = \frac{1}{2} + 2 \times 1 = \frac{5}{2} \neq 0$, $\therefore$ 本选项不符合题意;

B: $\because (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 \neq 0$, $\therefore$ 本选项不符合题意;

C: $\because (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{b}^2 = \frac{1}{2} - 2 \times 1 = -\frac{3}{2} \neq 0$, $\therefore$ 本选项不符合题意;

D: $\because (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^2 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$, $\therefore$ 本选项符合题意. 故选 D.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了平面向量数量积的定义和运算性质, 考查了两平面向量数量积为零则这两个平面向量互相垂直这一性质, 考查数学运算学科素养. 解题关键是熟记向量垂直的充要条件.

2. 【高考全国 III 卷理数 6】已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 5, |\mathbf{b}| = 6, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6$, 则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle =$ ()

A. $-\frac{31}{35}$

B. $-\frac{19}{35}$

C. $\frac{17}{35}$

D. $\frac{19}{35}$

【答案】D

【思路导引】计算出 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ 、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值, 利用平面向量数量积可计算出 $\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$ 的值.

【解析】 $\because |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6, \therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 5^2 - 6 = 19$.

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{25 - 2 \times 6 + 36} = 7$, 因此

$\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{19}{5 \times 7} = \frac{19}{35}$. 故选 D.

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了平面向量夹角余弦值的计算，同时也考查了平面向量数量积的计算以及向量模的计算，考查数学运算、数学建模等学科素养。解题关键是熟记夹角公式。

新高考 3. 【高考山东卷 7】已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()

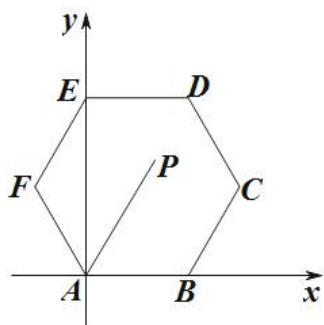
- A. $(-2, 6)$ B. $(-6, 2)$ C. $(-2, 4)$ D. $(-4, 6)$

【答案】A

【思路导引】首先根据题中所给的条件，结合正六边形的特征，得到 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的取值范围是 $(-1, 3)$ ，利用向量数量积的定义式，求得结果。

【解析】解法一： $\overrightarrow{AB}$ 的模为 2，根据正六边形的特征，可以得到 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的取值范围是 $(-1, 3)$ ，结合向量数量积的定义式，可知 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 等于 $\overrightarrow{AB}$ 的模与 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的乘积，所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $(-2, 6)$ ，故选：A。

解法二：如图，建立平面直角坐标系 $A-xy$ ，由题意知 $A(0, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(3, \sqrt{3})$ ， $F(-1, \sqrt{3})$ ，设 $P(x, y)$ ，则 $-1 < x < 3$ ， $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = (x, y) \cdot (2, 0) = 2x$ ， $\therefore -2 < 2x < 6$ ， $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $(-2, 6)$ 。



【专家解读】本题的特点是注重向量的应用，本题考查了平面向量数量积运算，考查平面向量数量积的几何意义，考查数学运算、直观想象、数学建模等学科素养。解题关键是理解平面向量数量积的定义。

3. 【高考全国 I 卷文数 14】设向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$ ， $\mathbf{b} = (m+1, 2m-4)$ ，若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ，则 $m =$ _____。

【答案】5

【思路导引】根据向量垂直，结合题中所给的向量的坐标，利用向量垂直的坐标表示，求得结果。

【解析】由 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，又 $\because \vec{a} = (1, -1)$ ， $\vec{b} = (m+1, 2m-4)$ ，
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (m+1) + (-1) \cdot (2m-4) = 0$ ，即 $m = 5$ ，故答案为：5。

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了考查了平面向量垂直充要条件的坐标形式，考查平面向量积的应用，考查数学运算、数学建模等学科素养。解题关键是熟记平面向量垂直充要条件的坐标形式。

4. 【高考全国 I 卷理数 14】设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为单位向量, 且 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

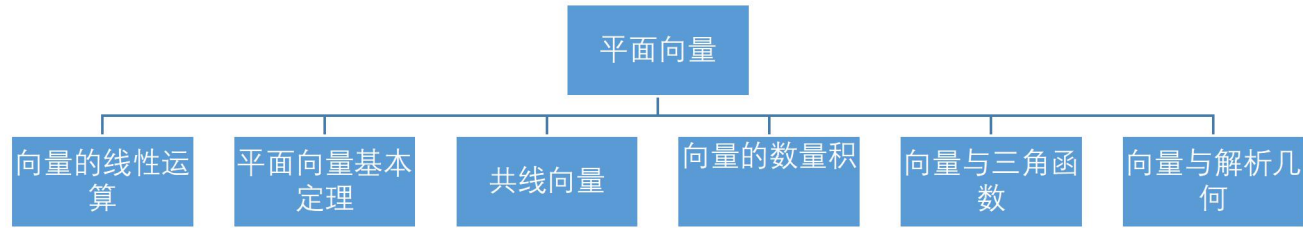
【思路导引】整理已知可得: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2}$, 再利用 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量即可求得 $2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -1$, 对 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ 变形可得: $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2}$, 问题得解.

【解析】 $\because \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为单位向量, $\therefore |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$, $\therefore |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2} = \sqrt{2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = 1$, 解得: $2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -1$, $\therefore |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2} = \sqrt{3}$.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了考查了平面向量模长的计算, 考查平面向量积的应用, 考查转化与化归思想, 考查数学运算、数学建模等学科素养. 解题关键是向量模的计算公式及转化能力.

讲考向

一、考向分析:



二、考向讲解

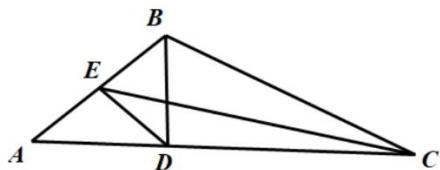
考查内容	解 题 技 巧
向量的线性运算	1. 平面向量的线性运算技巧 (1) 不含图形的情况: 可直接运用相应运算法则求解. (2) 含图形的情况: 将它们转化到三角形或平行四边形中, 充分利用相等向量、相反向量、三角形的中位线等性质, 把未知向量用已知向量表示出来求解. 2. 利用平面向量的线性运算求参数的一般思路 (1) 没有图形的准确作出图形, 确定每一个点的位置. (2) 利用平行四边形法则或三角形法则进行转化, 转化为要求的向量形式. (3) 比较, 观察可知所求. 3. 平面向量线性运算问题的常见类型及解题策略 (1) 向量加法或减法的几何意义. 向量加法和减法均适合三角形法则. (2) 求已知向量的和. 一般共起点的向量求和用平行四边形法则; 求差用三角形法则; 求首尾相连向量的和用三角形法则.

	(3) 求参数问题可以通过研究向量间的关系, 通过向量的运算将向量表示出来, 进行比较求参数的值.
向量的数量积	1. 数量积公式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos\theta$ 在解题中的运用, 解题过程具有一定的技巧性, 需要借助向量加、减法的运算及其几何意义进行适当变形; 也可建立平面直角坐标系, 借助数量积的坐标运算公式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ 求解, 较为简捷、明了. 2. 平面向量夹角的求法 (1) 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为非零向量, 则由平面向量的数量积公式得 $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$ (夹角公式), 所以平面向量的数量积可以用来解决有关角度的问题. (2) 在分析两向量的夹角时, 必须使两个向量的起点重合, 如果起点不重合, 可通过“平移”实现. 3. 平面向量的模的解题方法 (1) 若向量 $\mathbf{a}$ 是以坐标形式出现的, 求向量 $\mathbf{a}$ 的模可直接利用 $\mathbf{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$. (2) 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是非坐标形式出现的, 求向量 $\mathbf{a}$ 的模可应用公式 $\mathbf{a} ^2 = \mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, 或 $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} ^2 = (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2$, 先求向量模的平方, 再开方求解.
向量与解析几何	向量与平面几何综合问题的解法 1. 坐标法 把几何图形放在适当的坐标系中, 则有关点与向量就可以用坐标表示, 这样就能进行相应的代数运算和向量运算, 从而使问题得到解决. 2. 基向量法 适当选取一组基底, 沟通向量之间的联系, 利用向量间的关系构造关于未知量的方程进行求解.
平面向量基本定理	用平面向量基本定理解决问题 1. 实质是利用平行四边形法则或三角形法则进行向量的加、减或数乘运算. 2. 一般思路是: 先选择一组基底, 并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式, 再通过向量的运算来解决. 3. 要熟练运用平面几何的一些性质定理.
共线向量	1. 两平面向量共线的充要条件有两种形式 ① 若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充要条件是 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$; ② $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} (\mathbf{b} \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. 2. 向量共线的坐标表示既可以判定两向量平行, 也可以由平行求参数. 当两向量的坐标均非零时, 也可以利用坐标对应成比例来求解.

考查平面向量基本定理:

【例 1】(2021·广东高州一模) 如图所示的 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是线段 AC 上靠近 A 的三等分点, 点 E 是线段 AB

的中点, 则 $\overrightarrow{DE} =$ ()



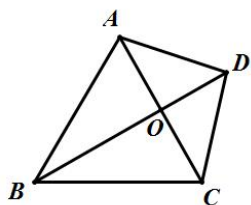
- A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ B. $-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ C. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ D. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

【答案】B

【解析】依题意, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 故选 B.

考查共线向量

【例 1】(2021·四川宜宾一模) 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形, $\angle ADC = 90^\circ$, 线段 AC, BD 交于点 O , 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, 用 a, b 表示 $\overrightarrow{OD}$ 为 ()



- A. $\overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{b}$
C. $\overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{b}$

【答案】A

【解析】由题意 $|AB| = |BC|, |AD| = |DC|$, 所以 $\triangle BAD$ 与 $\triangle BCD$ 全等, 则 $\triangle BAO$ 与 $\triangle BCO$ 全等, 所以 $|AO| = |OC|$, 所以 O 为 AC 的中点, 则 $BO \perp AC$, 在直角 $\triangle BOC$ 中, $\angle OCB = 60^\circ$, 所以 $|OB| = \sqrt{3}|OC|$. $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形, 则 $|OD| = |OC|$, 所以 $|OB| = \sqrt{3}|OD|$, 即 $\overrightarrow{BO} = \sqrt{3}\overrightarrow{OD}$, 又在等边三角形 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$, 所以 $\overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}$, 故选 A.

【名师点睛】关键点睛: 本题考查利用基底向量来表示平面向量, 解答本题的关键的由几何图形的性质得到

$|OB| = \sqrt{3}|OC|$ ，从而 $\overrightarrow{BO} = \sqrt{3}\overrightarrow{OD}$ ，再根据 $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ 得出答案，属于中档题。

考查线性运算：

【例 1】若点 M 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，且满足 $5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ ，则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 ()

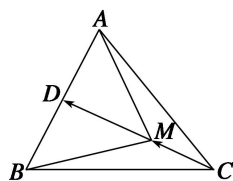
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{25}$

【答案】C

【解析】 AB 的中点为 D ，由 $5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ ，得 $3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$ ，

即 $3\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{BC}$ 。如图所示，故 C, M, D 三点共线，且 $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ ，也就

是 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 对于边 AB 的两高之比为 $3:5$ ，则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $\frac{3}{5}$ 。



考查数量积：

【例 1】(2021·安徽淮北一模) 已知 A, B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的两个动点， $|AB| = \sqrt{3}$ ， $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ ，

M 为线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】 $\because A, B$ 是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的两个动点， $\therefore |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ ，又 $\because |AB| = \sqrt{3}$ ，即 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

即 $\cos \angle BAO = \frac{\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 $\angle BAO = \frac{\pi}{6}$ ， $\therefore \angle AOB = \pi - \frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{2\pi}{3}$ ， $\because M$ 是线段 AB 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB},$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \right) (3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}) = \frac{3}{2}|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{3}{2} \times 1^2 - 1^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4},$$

故选 A。

【名师点睛】关键点睛：本题解题的关键是：利用 A, B 在圆上以及 $|AB| = \sqrt{3}$ 得到 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ 。

【例 2】已知 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ， $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{t}$ ， $|\overrightarrow{AC}| = t$ ，若 P 点是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ ，则

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 ()

A. 13 B. 15 C. 19 D. 21

【答案】 A

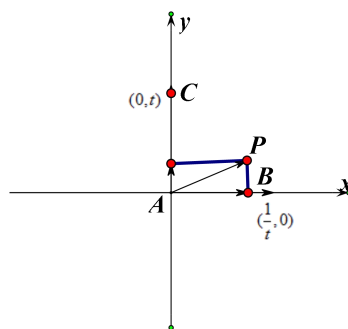
【解析】 以 A 为坐标原点, 建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $B(\frac{1}{t}, 0)$, $C(0, t)$, $\overrightarrow{AP} = (1, 0) +$

$4(0, 1) = (1, 4)$, 即 $P(1, 4)$, 所以 $\overrightarrow{PB} = (\frac{1}{t} - 1, -4)$,

$\overrightarrow{PC} = (-1, t - 4)$, 因此 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 1 - \frac{1}{t} - 4t + 16 =$

$17 - (\frac{1}{t} + 4t)$, 因为 $\frac{1}{t} + 4t \geq 2\sqrt{\frac{1}{t} \cdot 4t} = 4$, 所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$

的最大值等于 13, 当 $\frac{1}{t} = 4t$, 即 $t = \frac{1}{2}$ 时取等号.



考查向量与三角函数:

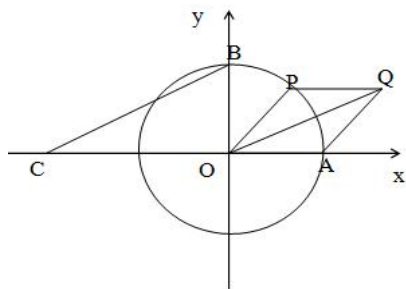
【例 1】 设向量 $a_k = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6}) (k = 0, 1, 2, \dots, 12)$, 则 $\sum_{k=0}^{11} (\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}})$ 的值为 _____

【答案】 $9\sqrt{3}$

【解析】 $\frac{20}{11} \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6}) \cdot (\cos \frac{(k+1)\pi}{6}, \sin \frac{(k+1)\pi}{6} + \cos \frac{(k+1)\pi}{6})$

$= \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2k\pi + \pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6} \cos \frac{(k+1)\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \sin \frac{2k\pi + \pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{6}$ 因此 $\sum_{k=0}^{11} \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 12 = 9\sqrt{3}$

【例 2】 (2021·贵溪一中月考) 如图所示, A 、 B 分别是单位圆与 x 轴、 y 轴正半轴的交点, 点 P 在单位圆上, $\angle AOP = \theta (0 < \theta < \pi)$, 点 C 坐标为 $(-2, 0)$, 平行四边形 $OAQP$ 的面积为 S .



(1) 求 $t = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} + S$ 的最大值;

(2) 若 $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OP}$, 求 $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$.

【答案】(1) $1 + \sqrt{2}$; (2) $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

【分析】(1) 由三角函数的定义得出点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$, 计算出点 Q 的坐标, 利用三角恒等变换思想结合平面向量数量积的坐标运算以及平行四边形的面积公式可得出 t 关于 θ 的表达式, 利用正弦函数的有界性可得出 t 的最大值; (2) 由 $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OP}$ 以及同角三角函数的基本关系可得出关于 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 的方程组, 结合 $0 < \theta < \pi$ 可求得 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 的值, 利用二倍角的正弦、余弦公式以及两角差的正弦公式可求得 $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【解析】(1) 由已知, 得 $A(1, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $P(\cos\theta, \sin\theta)$,

因为四边形 $OAQP$ 是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = (1 + \cos\theta, \sin\theta)$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 + \cos\theta$.

又平行四边形 $OAQP$ 的面积为 $S = |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin\theta = \sin\theta$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} + S = 1 + \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

又 $0 < \theta < \pi$, 则 $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$, 所以当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} + S$ 的最大值为 $1 + \sqrt{2}$.

(2) 由题意, 知 $\overrightarrow{CB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OP} = (\cos\theta, \sin\theta)$, 因为 $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OP}$, 得 $\cos\theta = 2\sin\theta$,

又 $0 < \theta < \pi$, 结合 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 得 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta = \frac{4}{5}$,

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\theta \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

【名师点睛】方法点睛: 求函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $[a, b]$ 上值域的一般步骤:

第一步: 三角函数式的化简, 一般化成形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + k$ 的形式或 $y = A \cos(\omega x + \varphi) + k$ 的形式;

第二步: 由 x 的取值范围确定 $\omega x + \varphi$ 的取值范围, 再确定 $\sin(\omega x + \varphi)$ (或 $\cos(\omega x + \varphi)$) 的取值范围;

第三步: 求出所求函数的值域 (或最值).

考查向量与解析几何:

【例 1】已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1 、 F_2 是 C 上的两个焦点, 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$,

则 y_0 的取值范围是

$$(A) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (B) \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad (C) \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \quad (D) \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

【答案】A

【解析】由题知 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$, $\frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1$, 所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0) \cdot (\sqrt{3} - x_0, -y_0)$
 $= x_0^2 + y_0^2 - 3 = 3y_0^2 - 1 < 0$, 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < y_0 < \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 A.

【例 2】(2021·陕西宝鸡一模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且以 F_1F_2

为直径的圆与双曲线 C 的渐近线在第四象限交点为 P , PF_1 交双曲线左支于 Q , 若 $2\overrightarrow{F_1Q} = \overrightarrow{QP}$, 则双曲线的离心率为 ()

$$A. \frac{\sqrt{10}+1}{2} \quad B. \sqrt{10} \quad C. \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad D. \sqrt{5}$$

【答案】A

【解析】 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 圆方程为 $x^2 + y^2 = c^2$,

$$\text{由} \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}, \text{ 由 } a^2 + b^2 = c^2, x > 0, y < 0, \text{ 解得 } \begin{cases} x = a \\ y = -b \end{cases}, \text{ 即 } P(a, -b),$$

设 $Q(x_0, y_0)$, 由 $2\overrightarrow{F_1Q} = \overrightarrow{QP}$, $(a - x_0, -b - y_0) = 2(x_0 + c, y_0)$, 得 $x_0 = \frac{a-2c}{3}$, $y_0 = -\frac{b}{3}$,

因为 Q 在双曲线上, $\therefore \frac{(a-2c)^2}{9a^2} - \frac{b^2}{9b^2} = 1$, $(1-2e)^2 = 10$, 解得 $e = \frac{\sqrt{10}+1}{2}$ ($e = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$ 舍去), 故选 A.

【名师点睛】关键点点睛: 解题关键是找到关于 a, b, c 的齐次关系式, 由题意中向量的线性关系, 可得解法,

圆与渐近线相交得 P 点坐标, 由向量线性关系得 Q 点坐标, 代入双曲线方程可得.

考查向量与解三角形:

【例 1】(2021 海南海南中学高三月考) 已知向量 $\vec{a} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \right)$, $\vec{b} = (\sin x, \cos x)$,

$$f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

(1) 求 $f(x)$ 的最大值及 $f(x)$ 取最大值时 x 的取值集合 M ;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 是角 A, B, C 的对边, 若 $\frac{C}{2} + \frac{\pi}{4} \in M$, 求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

【解析】(1) $\because \vec{a} = (\cos x, -\sqrt{3}\cos x)$,

$\therefore f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore f(x)$ 的最大值为

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 此时 $2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\therefore M = \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(2) $\because \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4} \in M$, $\therefore \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{5\pi}{12}$, $C = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$,

$\because C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - B)}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan B$,

锐角 $\triangle ABC$ 中, $\because \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \tan B > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \frac{a}{b} > \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即 $\frac{a}{b}$ 的取值范围为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$.

【名师点睛】 本题考查三角形中的取值范围, 解题的关键是将所求利用正弦定理以及角的关系化为

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan B$, 利用角的范围求解.

讲题型

平面向量的数量积的解题方法

【例1】 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在边 CD 上, 若 $\vec{AF} \cdot \vec{BE} = \sqrt{2}$, 则 $\vec{AF} \cdot \vec{AC}$ 的值是_____.

解析: 方法一 坐标法. 以 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系, 则 $A(0, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$, $E(\sqrt{2}, 1)$, $F(x, 2)$. 故 $\vec{AF} = (x, 2)$, $\vec{BE} = (\sqrt{2}, 1)$, $\vec{AC} = (x - \sqrt{2}, 2)$, $\therefore \vec{AF} \cdot \vec{BE} = (\sqrt{2}, 0) \cdot (x, 2) = \sqrt{2}x$. 又 $\vec{AF} \cdot \vec{BE} = \sqrt{2}$,

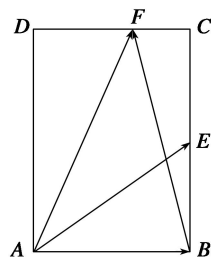
$\therefore x = 1$. $\therefore \vec{AF} = (1 - \sqrt{2}, 2)$. $\therefore \vec{AF} \cdot \vec{AC} = (\sqrt{2}, 1) \cdot (1 - \sqrt{2}, 2) = \sqrt{2} - 2 + 2 = \sqrt{2}$.

方法二 用 $\vec{AB}$ 表示, 是关键. 设 $\vec{AF} = x\vec{AB}$, 则 $\vec{AF} = (x - 1)\vec{AB} + 2\vec{AD}$, $\therefore \vec{AF} \cdot \vec{AC} =$

$\vec{AF} \cdot (\vec{AB} + \vec{AD}) = x^2 \vec{AB} \cdot \vec{AB} + 2x \vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AD} \cdot \vec{AD} = 2x^2 + 2x\sqrt{2} + 4$. 又 $\vec{AF} \cdot \vec{BE} = \sqrt{2}$, $\therefore 2x = \sqrt{2}$, $\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore \vec{AF} \cdot \vec{AC} =$

$2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + 4 = 2 + 2 + 4 = 8$. $\therefore \vec{AF} \cdot \vec{AC} = 8$.

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 = \sqrt{2}$.



【例2】 若 a, b, c 均为单位向量, 且 $a \cdot b = 0$, $(a - c) \cdot (b - c) \leq 0$, 则 $|a + b - c|$ 的最大值为 ()

A. $\sqrt{2}-1$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

解析：法一：由题意知 $a^2=b^2=c^2=1$ ，又 $a \cdot b=0$ ， $\therefore (a-c) \cdot (b-c)=a \cdot b-a \cdot c-b \cdot c+c^2 \leq 0$ ，

$$\therefore a \cdot c+b \cdot c \geq c^2=1, \therefore |a+b-c|^2=a^2+b^2+c^2+2a \cdot b-2a \cdot c-2b \cdot c=3-2(a \cdot c+b \cdot c) \leq 1,$$

$$\therefore |a+b-c| \leq 1.$$

方法二 设 $a=(1, 0)$, $b=(0, 1)$, $c=(x, y)$ ，则 $x^2+y^2=1$, $a-c=(1-x, -y)$, $b-c=(-x, 1-y)$ ，

$$\text{则 } (a-c) \cdot (b-c)=(1-x)(-x)+(-y)(1-y)=x^2+y^2-x-y=1-x-y \leq 0, \text{ 即 } x+y \geq 1.$$

$$\text{又 } a+b-c=(1-x, 1-y),$$

$$\therefore |a+b-c|=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{3-2(x+y)} \leq 1.$$

小结：(1)涉及数量积和模的计算问题，通常有两种求解思路：

①直接利用数量积的定义；

②建立坐标系，通过坐标运算求解.

(2)在利用数量积的定义计算时，要善于将相关向量分解为图形中模和夹角已知的向量进行计算. 求平面向量的模时，常把模的平方转化为向量的平方.

专题 07 数列

讲高考

1. 【高考全国 I 卷文数 10】设 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_1+a_2+a_3=1$, $a_2+a_3+a_4=2$ ，则 $a_6+a_7+a_8=$ ()

A. 12

B. 24

C. 30

D. 32

【答案】D

【思路导引】根据已知条件求得 q 的值，再由 $a_6+a_7+a_8=q^5(a_1+a_2+a_3)$ 可求得结果.

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=1$ ，

$$a_2+a_3+a_4=a_1q+a_1q^2+a_1q^3=a_1q(1+q+q^2)=q=2,$$

$$\therefore a_6+a_7+a_8=a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7=a_1q^5(1+q+q^2)=q^5=32, \text{ 故选 D.}$$

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了等比数列及其性质，考查等比数列基本量的计算，考查数学运算学科素养. 解题关键是正确应用等比数列的性质.

2. 【高考全国 II 卷理数 4】北京天坛的圆丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一

层的最后一环多9块,向外每环依次也增加9块.已知每层环数相同,且下层比中层多729块,则三层共有扇面形石板(不含天心石) ()

- A. 3699块 B. 3474块 C. 3402块 D. 3339块

【答案】C

【思路导引】第 n 环天石心块数为 a_n , 第一层共有 n 环, 则 $\{a_n\}$ 是以 9 为首项, 9 为公差的等差数列,

设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 由题意可得 $S_{3n} - S_{2n} = S_{2n} - S_n + 729$, 解方程即可得到 n , 进一步得到 S_{3n} .

【解析】设第 n 环天石心块数为 a_n , 第一层共有 n 环, 则 $\{a_n\}$ 是以 9 为首项, 9 为公差的等差数列,

$a_n = 9 + (n-1) \times 9 = 9n$, 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则第一层、第二层、第三层的块数分别为

$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$, 因为下层比中层多 729 块, 所以 $S_{3n} - S_{2n} = S_{2n} - S_n + 729$, 即

$$\frac{3n(9+27n)}{2} - \frac{2n(9+18n)}{2} = \frac{2n(9+18n)}{2} - \frac{n(9+9n)}{2} + 729, \text{ 即 } 9n^2 = 729, \text{ 解得 } n=9, \text{ 所以}$$

$$S_{3n} = S_{27} = \frac{27(9+9 \times 27)}{2} = 3402, \text{ 故选 C.}$$

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了等差数列的通项公式的基本量计算, 考查了等差数列前 n 项和公式的应用, 考查数学文化, 考查函数与方程思想, 考查数学运算学科素养. 解题关键是正确消元.

3. **【高考全国 II 卷理数 6】**数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{m+n} = a_m a_n$, 若 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = 2^{15} - 2^5$, 则 $k =$

()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】C

【思路导引】取 $m=1$, 可得出数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 利用等比数列求和公式可得出关于 k 的等式, 由 $k \in \mathbb{N}^*$ 可求得 k 的值.

【解析】在等式 $a_{m+n} = a_m a_n$ 中, 令 $m=1$, 可得 $a_{n+1} = a_n a_1 = 2a_n$, $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$,

所以, 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 以 2 为公比的等比数列, 则 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$,

$$\therefore a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = \frac{a_{k+1} \cdot (1-2^{10})}{1-2} = \frac{2^{k+1} \cdot (1-2^{10})}{1-2} = 2^{k+1} (2^{10} - 1) = 2^5 (2^{10} - 1),$$

$\therefore 2^{k+1} = 2^5$, 则 $k+1=5$, 解得 $k=4$. 故选: C.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了等比数列的通项公式的基本量计算, 考查了等比数列前 n 项

和公式的应用, 考查函数与方程思想, 考查数学运算、数学建模等学科素养. 解题关键是正确应用有关公式解决问题.

4. 【高考浙江卷 7】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 公差 $d \neq 0$, $\frac{a_1}{d} \leq 1$. 记 $b_1 = S_2$, $b_{n+1} = S_{n+2} - S_{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 下列等式不可能成立的是 ()

A. $2a_4 = a_2 + a_6$ B. $2b_4 = b_2 + b_6$ C. $a_4^2 = a_2 a_8$ D. $b_4^2 = b_2 b_8$

【答案】B

【解析】A. 由等差数列的性质可知 $2a_4 = a_2 + a_6$, 成立;

B. $b_4 = S_5 - S_6 = -a_6$, $b_2 = S_3 - S_2 = a_3$, $b_6 = S_7 - S_{10} = -(a_8 + a_9 + a_{10}) = -3a_9$,

若 $2b_4 = b_2 + b_6$, 则 $-2a_6 = a_3 - 3a_9 \Leftrightarrow 2(a_9 - a_6) = a_3 - a_9$,

即 $6d = -6d \Leftrightarrow d = 0$, 这与已知矛盾, 故 B 不成立;

C. $a_4^2 = a_2 a_8 \Leftrightarrow (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d)$, 整理为: $a_1 = d$, 故 C 成立;

D. $b_8 = S_9 - S_{14} = -(a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}) = -5a_{12}$, 当 $b_4^2 = b_2 b_8$ 时, 即 $a_6^2 = a_3 \cdot (-5a_{12})$, 整理为

$(a_1 + 5d)^2 = -5(a_1 + 2d)(a_1 + 11d)$, 即 $2a_1^2 + 25a_1 d + 45d^2 = 0$, $\Delta > 0$, 方程有解, 故 D 成立. 综上所述,

等式不可能成立的是 B, 故选 B.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了等差数列的性质应用, 考查数学运算、数学建模等学科素养. 解题关键是合理等差数列的性质解题.

5. 【高考全国 II 卷文数 14】记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = -2$, $a_2 + a_6 = 2$, 则 $S_{10} =$ _____.

【答案】25

【思路导引】 $\because \{a_n\}$ 是等差数列, 根据已知条件 $a_2 + a_6 = 2$, 求出公差, 根据等差数列前 n 项和, 即可求得答案.

【解析】 $\because \{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = -2$, $a_2 + a_6 = 2$. 设 $\{a_n\}$ 等差数列的公差 d , 根据等差数列通项公式:

$a_n = a_1 + (n-1)d$, 可得 $a_1 + d + a_1 + 5d = 2$, 即: $-2 + d + (-2) + 5d = 2$, 整理可得: $6d = 6$, 解得: $d = 1$.

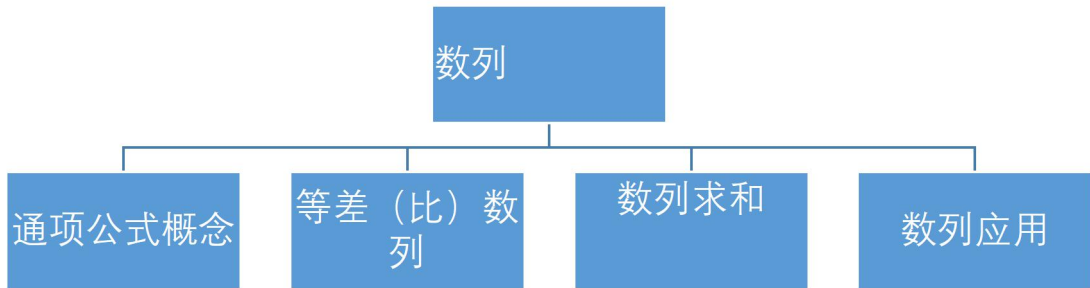
$\therefore$ 根据等差数列前 n 项和公式: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 可得:

$$S_{10} = 10 \times (-2) + \frac{10 \times (10-1)}{2} = -20 + 45 = 25, \therefore S_{10} = 25. \text{ 故答案为: } 25.$$

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了等差数列通项公式及等差数列的前 n 项和公式，考查数学运算学科素养，解题关键是掌握等差数列的通项公式及前 n 项和公式。

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
通项公式	1、用观察法求数列的通项公式的两个技巧 (1)根据数列的前几项求它的一个通项公式，要注意观察每一项的特点，观察出项与 n 之间的关系、规律，可使用添项、通分、分割等办法，转化为一些常见数列的通项公式来求。 (2)对于正负符号变化，可用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 来调整。 2、已知 S_n 求 a_n 的三个步骤 (1)先利用 $a_1 = S_1$ 求出 a_1； (2)用 $n-1$ 替换 S_n 中的 n 得到一个新的关系，利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 便可求出当 $n \geq 2$ 时 a_n 的表达式； (3)对 $n=1$ 时的结果进行检验，看是否符合 $n \geq 2$ 时 a_n 的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写；如果不符合，则应该分 $n=1$ 与 $n \geq 2$ 两段来写。 3、由递推关系式求通项公式的常用方法 (1) 已知 a_1 且 $a_n - a_{n-1} = f(n) (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$，可用“累加法”求 a_n。 (2) 已知 a_1 且 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n) (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$，可用“累乘法”求 a_n。 (3) 已知 a_1 且 $a_{n+1} = qa_n + b$，则 $a_{n+1} + k = q(a_n + k)$ (其中 k 可由待定系数法确定)，可转化为等比数列 $\{a_n + k\}$。 另外：1. 形如 $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C} (A, B, C \text{ 为常数})$ 的数列，可通过两边同时取倒数的方法构造新数列求解。

	(4) 形如 $a_{n+1} + a_n = f(n)$ 的数列, 可将原递推关系改写成 $a_{n+2} + a_{n+1} = f(n+1)$, 两式相减即得 $a_{n+2} - a_n = f(n+1) - f(n)$, 然后按奇偶分类讨论即可.
等差数列	1、等差数列运算问题的通性通法 (1) 等差数列运算问题的一般求法是设出首项 a_1 和公差 d, 然后由通项公式或前 n 项和公式转化为方程(组)求解. (2) 等差数列的通项公式及前 n 项和公式, 共涉及五个量 a_1, a_n, d, n, S_n, 知其中三个就能求另外两个, 体现了用方程的思想解决问题. 2、等差数列的四种判断方法 (1) 定义法: $a_{n+1} - a_n = d$ (d 是常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列. (2) 等差中项法: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列. (3) 通项公式: $a_n = pn + q$ (p, q 为常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列. (4) 前 n 项和公式: $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列. 3、等差数列的性质 (1) 项的性质: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_m - a_n = (m - n)d \Leftrightarrow \frac{a_m - a_n}{m - n} = d$ ($m \neq n$), 其几何意义是点 $(n, a_n), (m, a_m)$ 所在直线的斜率等于等差数列的公差. (2) 和的性质: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 则 ① $S_{2n} = n(a_1 + a_{2n}) = \dots = n(a_n + a_{n+1})$; ② $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$. 4、求等差数列前 n 项和 S_n 最值的两种方法 (1) 函数法: 利用等差数列前 n 项和的函数表达式 $S_n = an^2 + bn$, 通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解. (2) 邻项变号法: ① 当 $a_1 > 0, d < 0$ 时, 满足 $\begin{cases} a_m \geq 0, \\ a_{m+1} \leq 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 S_n 取得最大值 S_m. ② 当 $a_1 < 0, d > 0$ 时, 满足 $\begin{cases} a_m \leq 0, \\ a_{m+1} \geq 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 S_n 取得最小值 S_m.
等比数列	1、解决等比数列有关问题的常用思想方法 (1) 方程的思想: 等比数列中有五个量 a_1, n, q, a_n, S_n, 一般可以“知三求二”, 通过列方程(组)求关键量 a_1 和 q, 问题可迎刃而解. (2) 分类讨论的思想: 在使用等比数列的前 n 项和公式时, 应根据公比的取值情况进行分类讨论, 此外在运算过程中, 还应善于运用整体代换思想简化运算. 2、证明等比数列的用方法: 证明一个数列为等比数列常用定义法与等比中项法, 其他方法只用于选择题、填空题中的判定; 若证明某数列不是等比数列, 则只要证明存在连续三项不成等比数列即可.

数列求和	1、分组转化法求和的常见类型 (1) 若 $a_n = b_n \pm c_n$, 且 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 为等差或等比数列, 可采用分组求和法求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. (2) 通项公式为 $a_n = \begin{cases} b_n, & n \text{ 为奇数,} \\ c_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 的数列, 其中数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是等比数列或等差数列, 可采用分组求和法求和. 2、错位相减法求和时两个注意点 (1) 要善于识别题目类型, 特别是等比数列公比为负数的情形; (2) 在写出 “S_n” 与 “qS_n” 的表达式时应特别注意将两式 “错项对齐”, 以便下一步准确写出 “$S_n - qS_n$” 的表达式. (3) 在应用错位相减法求和时, 若等比数列的公比为参数, 应分公比等于 1 和不同于 1 两种情况求解. 3. 裂项相消法 (1) 把数列的通项拆成两项之差, 在求和时中间的一些项可以相互抵消, 从而求得其和. (2) 常见的裂项技巧 ① $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. ② $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$. ③ $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$. ④ $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. (3) 利用裂项相消法求和时, 应注意抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项, 也有可能前面剩两项, 后面也剩两项, 再就是将通项公式裂项后, 有时候需要调整前面的系数, 使裂开的两项之差和系数之积与原通项公式相等.

考查通项公式:

【例 1】(2021·江苏镇江期中考试) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 定义 $\{a_n\}$ 的“优值”为

$$H_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_n}{n}, \text{ 现已知 } \{a_n\} \text{ 的“优值” } H_n = 2^n, \text{ 则 } a_n = \underline{\hspace{2cm}}, S_n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $n+1$ $\frac{n(n+3)}{2}$

【分析】由新定义得出 $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^n$, 然后写出 $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-2}a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-1}$, 相减后可得 $a_n (n \geq 2)$. 再求得 a_1 即可.

【解析】由题意 $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^n$, $\therefore n \geq 2$ 时, $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-2}a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-1}$,

两式相减得: $2^{n-1}a_n = n \cdot 2^n - (n-1) \cdot 2^{n-1} = (n+1) \cdot 2^{n-1}$, $a_n = n+1$, 又 $a_1 = 2$, 满足 $a_n = n+1$,

$$\therefore a_n = n+1, S_n = \frac{n(2+n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}. \text{ 故答案为: } n+1; \frac{n(n+3)}{2}.$$

【点睛】关键点点睛: 本题考查数列新定义, 解题关键是把新定义进行转化, 转化为与数列通项公式有关的和式, 然后可求通项公式. 还要注意解题中 $a_n (n \geq 2)$ 与 a_1 求法的不同, 需要分别求解验证.

【例 2】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \ln(1 + \frac{1}{n})$, 则 $a_n =$ ()

- A. $2 + n \ln n$ B. $2 + (n-1) \ln n$ C. $1 + n + \ln n$ D. $2n + n \ln n$

【答案】D

【解析】由题, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \ln \frac{n+1}{n}$, 则 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} + \ln \frac{n}{n-1}$, $\frac{a_{n-1}}{n-1} = \frac{a_{n-2}}{n-2} + \ln \frac{n-1}{n-2} \dots$, $\frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{1} + \ln \frac{2}{1}$,

所以由累加法可得, $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n-1}{n-2} \dots + \ln \frac{2}{1}$, 即 $\frac{a_n}{n} = a_1 + \ln \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \dots \frac{2}{1} \right)$, 则

$$\frac{a_n}{n} = 2 + \ln n, \text{ 所以 } a_n = 2n + n \ln n, \text{ 故选 D.}$$

考查等(差)比数列的证明

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1} = 4a_n + 2$, $a_1 = 1$.

(1) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列; (2) 设 $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;

【解析】(1) 由题意, $S_{n+1} = 4a_n + 2$, $S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$, 两式相减, 得

$$S_{n+2} - S_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n), a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \therefore a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n),$$

$$\therefore b_n = a_{n+1} - 2a_n, \therefore b_{n+1} = 2b_n, \text{ 又由题设, 得 } 1 + a_2 = 4 + 2 = 6, \text{ 即 } a_2 = 5,$$

$$\therefore b_1 = a_2 - 2a_1 = 3, \therefore \{b_n\} \text{ 是首项为 } 3, \text{ 公比为 } 2 \text{ 的等比数列};$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } b_n = 3 \cdot 2^{n-1}, \therefore b_n = a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n-1},$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } c_{n+1} - c_n = \frac{3}{4}. \therefore \text{数列 } \{c_n\} \text{ 是首项为 } \frac{1}{2}, \text{ 公差为 } \frac{3}{4} \text{ 的等差数列};$$

【点睛】本题考查数列递推式, 考查了等差关系与等比关系的确定, 是中档题.

考查等差(比)数列性质:

【例 1】(2021·四川凉山彝族自治州一模) S_n 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_3 + a_5 + a_7 = tS_9$, 则 $t =$ ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为正项等差数列, 且 $a_3 + a_5 + a_7 = tS_9$, 所以 $3a_5 = t \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9ta_5$, 解得 $t = \frac{1}{3}$,

故选 B.

【例 2】设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_2 a_4 = a_5$, $a_4 = 27$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】 $a_n = 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $a_2 a_4 = a_5$, $a_4 = 27$, 所以 $a_4 = a_2 q^2 = \frac{a_5}{a_4} q^2 = q^3 = 27$, 解得 $q = 3$,

所以 $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{27}{27} = 1$, 因此, $a_n = 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. 故答案为 $a_n = 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

【名师点睛】本题主要考查等比数列基本量的计算, 熟记等比数列的通项公式即可, 属于常考题型.

考查数列求和:

【例 1】(2021·河南郑州一模) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n + \frac{1}{2^n} = (-1)^n a_n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), 则数列 $\{S_n\}$ 的前 7 项和为 ()

- A. $-\frac{1}{256}$ B. $-\frac{85}{256}$ C. $-\frac{1}{1024}$ D. $-\frac{341}{1024}$

【答案】B

【解析】 $\because S_n + \frac{1}{2^n} = (-1)^n a_n$, $\therefore n = 1$ 时, $S_1 + \frac{1}{2} = -a_1$, 即 $a_1 + \frac{1}{2} = -a_1$, $a_1 = -\frac{1}{4}$,

由已知 $S_n = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n} - (-1)^{n-1} a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^n a_n + (-1)^n a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$ (*),

(*)式中 n 为偶数时, $a_n = a_n + a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$, $a_{n-1} = -\frac{1}{2^n}$, 此时 $n-1$ 为奇数, $\therefore n$ 为奇数时 $a_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$;

(*)式中 n 为奇数时, $a_n = -a_n - a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$, $2a_n - \frac{1}{2^n} = -a_{n-1}$, 即 $a_{n-1} = -2 \times \left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, 此时 $n-1$

为偶数, $\therefore n$ 为偶数时, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\therefore a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2^n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 由 $S_n = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n}$, 得

n 为奇数时, $S_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$, n 为偶数时, $S_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0$, $\therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 的前 7 项和为

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{256} - \frac{1}{128}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} = -\frac{85}{256}. \text{ 故选 B.}$$

【点睛】关键点点睛: 本题考查求数列的前 n 项和. 解题关键是确定通项公式 a_n , 为此利用 $n \geq 2$ 时,

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 得递推关系, 然后按 n 的奇偶分类计算求解. 最后确定数列 $\{S_n\}$ 中的各项, 求出前 7 项和.

【例 2】已知递增等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 = 3$, $S_3 = 13$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ; (2) 设 $b_n = \frac{1}{(n+1)\log_3 a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$, $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$; (2) $T_n = \frac{n}{n+1}$.

【解析】(1) 由题可知 $\begin{cases} a_2 = 3 \\ S_3 = 13 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 q = 3 \\ a_1(1+q+q^2) = 13 \end{cases}$, 由递增等比数列 $\{a_n\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 9 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$ (舍), 所

$$\text{以 } S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{3^n - 1}{2};$$

(2) 由 (1) 知 $a_{n+1} = 3^n$, 所以 $b_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \log_3 a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和: $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \text{ 数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{n}{n+1}.$$

【点睛】本小题主要考查等比数列基本量的计算，考查等比数列通项公式和前 n 项和公式，考查裂项求和法，属于中档题.

考查数列应用：

【例 1】习近平总书记指出：“我们既要绿水青山，也要金山银山。”新能源汽车环保、节能，以电代油，减少排放，既符合我国的国情，也代表了世界汽车产业发展的方向. 工业部表示，到 2025 年中国的汽车总销量将达到 3500 万辆，并希望新能源汽车至少占总销量的五分之一. 山东某新能源公司年初购入一批新能源汽车充电桩，每台 12800 元，第一年每台设备的维修保养费用为 1000 元，以后每年增加 400 元，每台充电桩每年可给公司收益 6400 元.

(1) 每台充电桩第几年开始获利？（ $\sqrt{33} \approx 5.7$ ）

(2) 每台充电桩在第几年时，年平均利润最大.

【答案】(1) 公司从第 3 年开始获利；(2) 在第 8 年时，每台充电桩年平均利润最大

【解析】(1) 由题意知每年的维修保养费用是以 1000 为首项，400 为公差的等差数列，设第 n 年时累计利润为

$$\begin{aligned} f(n), f(n) &= 6400n - [1000 + 1400 + \dots + (400n + 600)] - 12800 \\ &= 6400n - n(200n + 800) - 12800 = -200n^2 + 5600n - 12800 = -200(n^2 - 28n + 64), \end{aligned}$$

开始获利即 $f(n) > 0$ ， $\therefore -200(n^2 - 28n + 64) > 0$ ，即 $n^2 - 28n + 64 < 0$ ，

解得 $14 - 2\sqrt{33} < n < 14 + 2\sqrt{33}$ ， $\because \sqrt{33} \approx 5.7$ ， $\therefore 2.6 < n < 25.4$ ， $\therefore$ 公司从第 3 年开始获利；

$$(2) \text{ 每台充电桩年平均利润为 } \frac{f(n)}{n} = -200 \left(n + \frac{64}{n} - 28 \right) \cdot -200(2\sqrt{64} - 28) = 2400,$$

当且仅当 $n = \frac{64}{n}$ ，即 $n = 8$ 时，等号成立. 即在第 8 年时每台充电桩年平均利润最大为 2400 元.

【点睛】本题考查等差数列的实际应用和利用基本不等式求最值，考查学生分析问题，解决问题的能力，根据条件列出符合题意的表达式是解本题的关键，属中档题.

考查数列与不等式：

【例 1】已知正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $S_n = n^2 a_n$. 令 $b_n = \frac{S_n}{n!}$ （其中 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ），数列 $\{b_n\}$ 的前 n

项和为 T_n ，证明： $1 \leq T_n < 2$.

【答案】证明见解析

【解析】当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$, 整理可得: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$ $\therefore \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-2}{n}$,

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n+1)} \quad \therefore a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 符合 $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ $\therefore a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\therefore S_n = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

所以 $b_n = \frac{S_n}{n!} = \frac{2n}{(n+1)n!} = 2\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$

$$\therefore T_n = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) \therefore \frac{1}{(n+1)!} > 0, \therefore 1 - \frac{1}{(n+1)!} < 1,$$

$$\therefore T_n < 2 \text{ 又 } a_n > 0, \therefore b_n > 0, \therefore T_n \geq T_1 = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2!}\right) = 1, \text{ 综上所述: } 1 \leq T_n < 2$$

【点睛】本题考查数列通项公式的求解、裂项相消法求解数列的前 n 项和的问题; 涉及到 a_n 与 S_n 关系的应用、累乘法求解数列的通项公式等知识; 求解数列前 n 项和的关键是能够根据通项公式的形式进行准确裂项, 进而前后相消求得结果.

讲题型

等差数列前 n 项和最值问题

【例】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=20$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_{10}=S_{15}$, 求当 n 取何值时, S_n 取得最大值, 并求出它的最大值.

【解析】法一: 因为 $a_1=20$, $S_{10}=S_{15}$,

$$\text{所以 } 10 \times 20 + \frac{10 \times 9}{2}d = 15 \times 20 + \frac{15 \times 14}{2}d, \text{ 所以 } d = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{由 } a_n = 20 + (n-1) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}n + \frac{65}{3}, \text{ 得 } a_{13} = 0. \text{ 即当 } n \leq 12 \text{ 时, } a_n > 0, \text{ 当 } n \geq 14 \text{ 时, } a_n < 0.$$

$$\text{所以当 } n=12 \text{ 或 } 13 \text{ 时, } S_n \text{ 取得最大值, 且最大值为 } S_{12}=S_{13} = \frac{13 \times (20+0)}{2} = 130.$$

$$\text{解法二: } S_n = 20n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{6}n^2 + \frac{125}{6}n = -\frac{5}{6}\left[n - \frac{25}{2}\right]^2 + \frac{3125}{24}.$$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n=12$ 或 13 时, S_n 取得最大值, 且最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

解法三: 由 $S_{10}=S_{15}$ 得 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$. 所以 $5a_{13}=0$, 即 $a_{13}=0$.

所以当 $n=12$ 或 13 时, S_n 取得最大值, 最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

【变式】 若将本例条件 “ $a_1=20$ ” 改为 “ $a_1=-20$ ”, 其他条件不变, 求当 n 取何值时, S_n 取得最小值, 并求出最小值.

【解析】 由 $S_{10}=S_{15}$, 得 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$, 所以 $a_{13}=0$. 又 $a_1=-20$, 所以 $a_{12}<0$, $a_{14}>0$,

所以当 $n=12$ 或 13 时, S_n 取得最小值, 最小值 $S_{12}=S_{13}=-130$.

求等差数列前 n 项和 S_n 最值的两种方法

1. 函数法: 利用等差数列前 n 项和的函数表达式 $S_n=an^2+bn$, 通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解.

2. 邻项变号法:

(1) 当 $a_1>0$, $d<0$ 时, 满足 $\begin{cases} a_m \geq 0, \\ a_{m+1} \leq 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 S_n 取得最大值 S_m .

(2) 当 $a_1<0$, $d>0$ 时, 满足 $\begin{cases} a_m \leq 0, \\ a_{m+1} \geq 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 S_n 取得最小值 S_m .

专题 08 不等式

讲高考

1. 【高考全国 II 文 12 理 11】若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则 ()

A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$ C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$

【答案】A

【解析】 由 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ 得: $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$, 令 $f(t) = 2^t - 3^{-t}$,

$\because y = 2^x$ 为 R 上的增函数, $y = 3^{-x}$ 为 R 上的减函数, $\therefore f(t)$ 为 R 上的增函数, $\therefore x < y$,

$\because y - x > 0$, $\therefore y - x + 1 > 1$, $\therefore \ln(y - x + 1) > 0$, 则 A 正确, B 错误; $\because |x - y|$ 与 1 的大小不确定, 故 CD

无法确定，故选 A.

【名师点睛】本题考查对数式的大小的判断问题，解题关键是能够通过构造函数的方式，利用函数的单调性得到 x, y 的大小关系，考查了转化与化归的数学思想.

2. 【高考全国III理 12】已知 $5^5 < 8^4, 13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3, b = \log_8 5, c = \log_{13} 8$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【答案】A

【解析】解法一：由题意可知 $a, b, c \in (0, 1)$,

$$\frac{a}{b} = \frac{\log_5 3}{\log_8 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 5} < \frac{1}{(\lg 5)^2} \cdot \left(\frac{\lg 3 + \lg 8}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lg 3 + \lg 8}{2 \lg 5} \right)^2 = \left(\frac{\lg 24}{\lg 25} \right)^2 < 1, \therefore a < b;$$

由 $b = \log_8 5$, 得 $8^b = 5$, 由 $5^5 < 8^4$, 得 $8^{5b} < 8^4$, $\therefore 5b < 4$, 可得 $b < \frac{4}{5}$;

由 $c = \log_{13} 8$, 得 $13^c = 8$, 由 $13^4 < 8^5$, 得 $13^4 < 13^{5c}$, $\therefore 5c > 4$, 可得 $c > \frac{4}{5}$.

综上所述, $a < b < c$. 故选 A.

解法二：易知 $a, b, c \in (0, 1)$, 由 $\frac{a}{b} = \frac{\log_5 3}{\log_8 5} = \log_5 3 \cdot \log_5 8 < \frac{(\log_5 3 + \log_5 8)^2}{4} = \frac{(\log_5 24)^2}{4} < \frac{2^2}{4} = 1$, 知

$a < b$. $\because b = \log_8 5, c = \log_{13} 8, \therefore 8^b = 5, 13^c = 8$, 即 $8^{5b} = 5^5, 13^{4c} = 8^4$ 又 $\because 5^5 < 8^4, 13^4 < 8^5, \therefore$

$13^{4c} = 8^4 > 5^5 = 8^{5b} > 13^{4b}$, 即 $b < c$. 综上所述: $a < b < c$, 故选 A.

【名师点睛】本题考查对数式的大小比较，涉及基本不等式、对数式与指数式的互化以及指数函数单调性的应用，考查推理能力，属于中等题.

3. 【新高考山东海南 8】若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，且 $f(2) = 0$ ，则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$ C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

【答案】D

【解析】 $\because$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，且 $f(2) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调递减，且 $f(-2) = 0, f(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$,

$\therefore$ 由 $xf(x-1) \geq 0$ 可得: $\begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \text{ 或 } x-1 \geq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \text{ 或 } x-1 \leq -2 \end{cases}$ 或 $x=0$

解得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 3$, $\therefore$ 满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1, 0] \cup [1, 3]$, 故选 D.

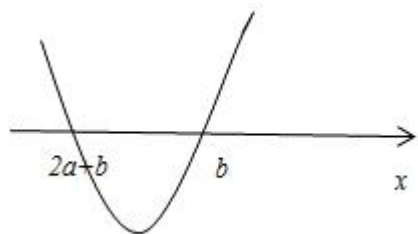
【名师点睛】 本题考查利用函数奇偶性与单调性解抽象函数不等式, 考查分类讨论思想方法, 属中档题.

4. 【高考浙江 9】已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$ 在 $x \geq 0$ 上恒成立, 则 ()

- A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $b < 0$ D. $b > 0$

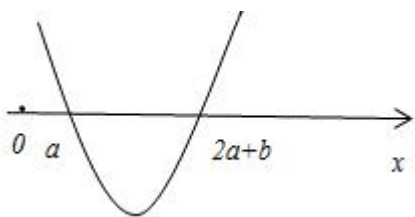
【答案】C

【解析】 当 $a < 0$ 时, 在 $x \geq 0$ 上, $x-a \geq 0$ 恒成立, $\therefore$ 只需满足 $(x-b)(x-2a-b) \geq 0$ 恒成立, 此时 $2a+b < b$, 由二次函数的图象可知, 只有 $b < 0$ 时, 满足 $(x-b)(x-2a-b) \geq 0$, $b > 0$ 不满条件;



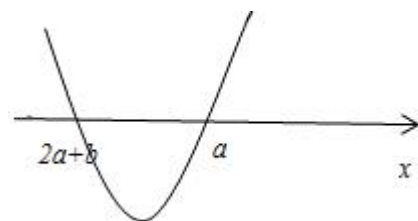
当 $b < 0$ 时, 在 $[0, +\infty)$ 上, $x-b \geq 0$ 恒成立, $\therefore$ 只需满足 $(x-a)(x-2a-b) \geq 0$ 恒成立, 此时当两根分别为 $x=a$ 和 $x=2a+b$,

(1) 当 $a+b > 0$ 时, 此时 $0 < a < 2a+b$, 当 $x \geq 0$ 时, $(x-a)(x-2a-b) \geq 0$ 不恒成立,

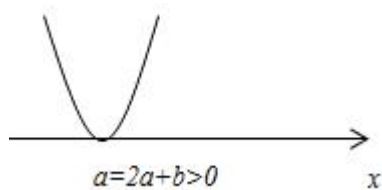


(2) 当 $a+b < 0$ 时, 此时 $2a+b < a$, 若满足 $(x-a)(x-2a-b) \geq 0$ 恒成立, 只需满足

$a < 0$



当 $a+b=0$ 时, 此时 $2a+b=a>0$, 满足 $(x-a)(x-2a-b)\geq 0$ 恒成立,



综上可知满足 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geq 0$ 在 $x\geq 0$ 恒成立时, 只有 $b<0$, 故选 C.

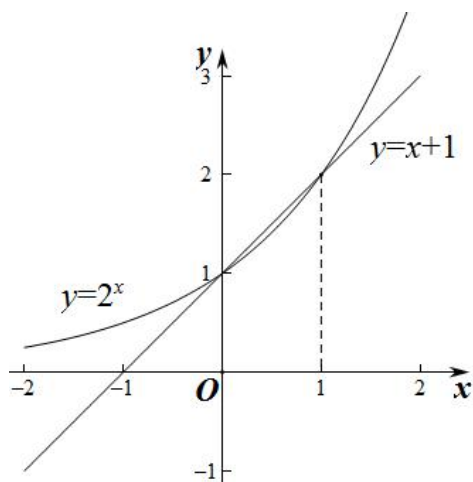
【点睛】本题主要考查三次函数在给定区间上恒成立问题, 考查学生分类讨论思想, 是一道中档题.

5. 【高考北京 6】已知函数 $f(x)=2^x-x-1$, 则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$

【答案】D

【解析】因为 $f(x)=2^x-x-1$, 所以 $f(x)>0$ 等价于 $2^x>x+1$, 在同一直角坐标系中作出 $y=2^x$ 和 $y=x+1$ 的图象如图, 两函数图象的交点坐标为 $(0, 1), (1, 2)$, 不等式 $2^x>x+1$ 的解为 $x<0$ 或 $x>1$, 所以不等式 $f(x)>0$ 的解集为: $(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$, 故选 D.



【名师点睛】本题考查了图象法解不等式, 属于基础题.

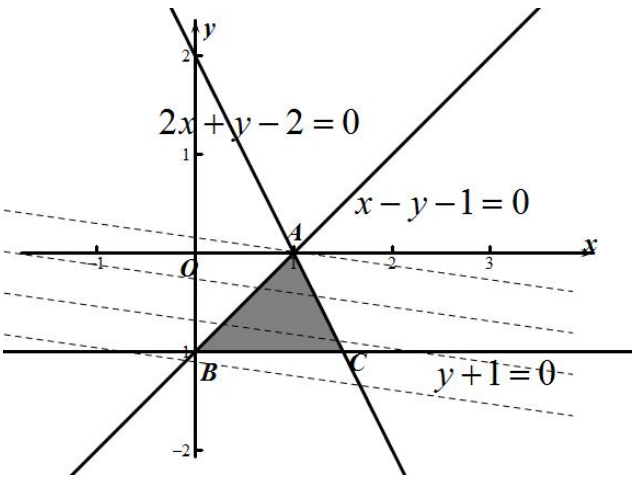
6. 【高考全国 I 文理 13】若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y-2\leq 0, \\ x-y-1\geq 0, \\ y+1\geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值为_____.

【答案】1

【解析】绘制不等式组表示的平面区域如图所示, 目标函数 $z=x+7y$ 即: $y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}z$, 其中 z 取得最大值时, 其几何意义表示直线系在 y 轴上的截距最大, 据此结合目标函数的几何意义可知目标函数在点 A 处取得

最大值，联立直线方程： $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ ，可得点 A 的坐标为： $A(1,0)$ ，据此可知目标函数的最大值为：

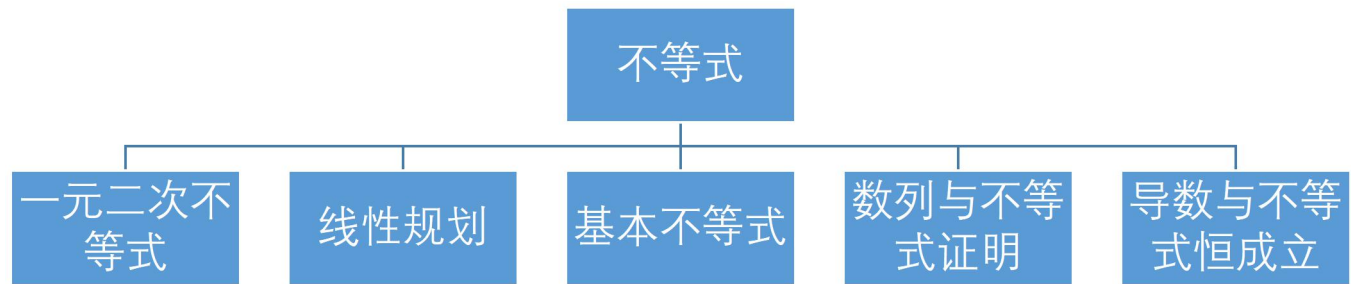
$z_{\max} = 1 + 7 \times 0 = 1$ ，故答案为：1.



【名师点睛】求线性目标函数 $z = ax + by (ab \neq 0)$ 的最值，当 $b > 0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时，z 值最大，在 y 轴截距最小时，z 值最小；当 $b < 0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时，z 值最小，在 y 轴上截距最小时，z 值最大.

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
	1、含有参数的不等式的求解，往往需要比较(相应方程)根的大小，对参数进行分类讨论 (1) 若二次项系数为常数，可先考虑分解因式，再对参数进行讨论；若不易分解因式，则可对判别式进行分类讨论. (2) 若二次项系数为参数，则应先考虑二次项系数是否为零，然后再讨论二次项系数不为零的情形，以便确定解集的形式.

一元二次不等式	(3) 其次对相应方程的根进行讨论, 比较大小, 以便写出解集. 2、一元二次不等式恒成立问题求解思路 (1) 一元二次不等式在 $\mathbf{R}$ 上恒成立确定参数的范围时, 结合一元二次方程, 利用判别式来求解. (2) 一元二次不等式在 $x \in [a, b]$ 上恒成立确定参数范围时, 要根据函数的单调性, 求其最小值, 让最小值大于等于 0, 从而求参数的范围.
线性规划	1. 求目标函数的最值 3 步骤: ①作图; ②平移; ③求值. 2. 常见的 3 类目标函数 (1) 截距型: 形如 $z = ax + by$. 求这类目标函数的最值常将函数 $z = ax + by$ 转化为直线的斜截式: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{z}{b}$, 通过求直线的截距 $\frac{z}{b}$ 的最值间接求出 z 的最值. (2) 距离型: 形如 $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$. (3) 斜率型: 形如 $z = \frac{y-b}{x-a}$.
导数与不等式恒成立	1、含全称、存在量词不等式恒成立问题的方法 (1) 存在 $x_1 \in A$, 任意 $x_2 \in B$ 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}$. (2) 任意 $x_1 \in A$, 存在 $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$. (3) 任意 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$. (4) 存在 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \leq g(x)_{\max}$. 2、利用导数研究含参数的不等式问题, 若能够分离参数, 则常将问题转化为形如 $a \geq f(x)$ (或 $a \leq f(x)$) 的形式, 通过求函数 $y = f(x)$ 的最值得参数范围. 恒成立问题的求解方法: $a \geq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立, 则 $a \geq f(x)_{\max}(x \in D)$; $a \leq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立, 则 $a \leq f(x)_{\min}$.
基本不等式	1. 应用基本不等式解题一定要注意应用的前提: “一正”“二定”“三相等”. 所谓“一正”是指正数, “二定”是指应用基本不等式求最值时, 和或积为定值, “三相等”是指满足等号成立的条件. 2. 在利用基本不等式求最值时, 要根据式子的特征灵活变形, 配凑出积、和为常数的形式, 然后再利用基本不等式. 3、条件最值的求解通常有三种方法: 一是消元法, 即根据条件建立两个量之间的函数关系, 然后代入代数式转化为函数的最值求解; 二是将条件灵活变形, 利用常数代换的方法构造和或积为常数的式子, 然后利用基本不等式求解最值; 三是对条件使用基本不等式, 建立所求目标函数的不等式求解.

	4、基本不等式的应用非常广泛，它可以和数学的其他知识交汇考查，解决这类问题的策略是： (1) 先根据所交汇的知识进行变形，通过换元、配凑、巧换“1”等手段把最值问题转化为用基本不等式求解，这是难点. (2) 用基本不等式求最值，要有用基本不等式求最值的意识. (3) 检验. 检验等号是否成立，完成后续问题.
数列与不等式证明	1. 两平面向量共线的充要条件有两种形式 ①若 $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$; ② $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}(\mathbf{b} \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. 2. 向量共线的坐标表示既可以判定两向量平行，也可以由平行求参数. 当两向量的坐标均非零时，也可以利用坐标对应成比例来求解.

考查一元二次不等式解法：

【例 1】(2021·湖南衡阳模拟) 不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则不等式 $2x^2 + bx + a > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$

B. $\{x | -1 < x < \frac{1}{2}\}$

C. $\{x | -2 < x < 1\}$

D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$

【答案】A

【解析】由题意可知 -1 、 2 是关于 x 的二次方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两根，

由韦达定理可得 $\begin{cases} -1 \times 2 = \frac{2}{a} \\ -1 + 2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$, 不等式 $2x^2 + bx + a > 0$ 即为 $2x^2 + x - 1 > 0$, 解得 $x < -1$ 或

$x > \frac{1}{2}$. 因此, 不等式 $2x^2 + bx + a > 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$, 故选 A.

【例 2】 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0 (a \in \mathbf{R})$.

【解析】若 $a=0$, 原不等式等价于 $-x+1 < 0$, 解得 $x > 1$.

若 $a < 0$, 原不等式等价于 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$.

若 $a > 0$, 原不等式等价于 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) < 0$.

① 当 $a = 1$ 时, $\frac{1}{a} = 1$, $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) < 0$ 无解; ② 当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 解 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) < 0$, 得 $\frac{1}{a} < x < 1$;

③ 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 解 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) < 0$, 得 $1 < x < \frac{1}{a}$.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$; 当 $a = 0$ 时, 解集为 $\{x \mid x > 1\}$;

当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\}$; 当 $a = 1$ 时, 解集为 $\varnothing$; 当 $a > 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\}$.

考查一元二次不等式恒成立:

【典例 1】已知命题“ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使 $2x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2} \leq 0$ ”是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 3)$

C. $(-3, +\infty)$

D. $(-3, 1)$

【答案】B

【解析】原命题是假命题, 则其否定是真命题, 即 $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2} > 0$ 恒成立, 故判别式 $(a-1)^2 - 4 < 0, a \in (-1, 3)$, 故选 B.

【典例 2】设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$. 若对于 $x \in [1, 3]$, $f(x) < -m + 5$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

【答案】 $\{m \mid m < \frac{6}{7}\}$.

【解析】要使 $f(x) < -m + 5$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立, 即 $m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}m - 6 < 0$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立.

令 $g(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}m - 6, x \in [1, 3]$, 当 $m > 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是增函数, 所以 $g(x)_{\max} = g(3) \Rightarrow$

$7m - 6 < 0$, 所以 $m < \frac{6}{7}$, 所以 $0 < m < \frac{6}{7}$; 当 $m = 0$ 时, $-6 < 0$ 恒成立; 当 $m < 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是减函数,

所以 $g(x)_{\max} = g(1) \Rightarrow m - 6 < 0$, 所以 $m < 6$, 所以 $m < 0$. 综上所述: m 的取值范围是 $\{m \mid m < \frac{6}{7}\}$.

考查基本不等式:

【例 1】(2021·石嘴山三中高三期末) 已知正数 a, b 满足 $2a + b = ab$, 则 $a + 2b$ 的最小值为 ()

A. 8

B. 10

C. 9

D. 6

【答案】C

解析】由 $2a+b=ab$ 得 $\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$,

因为 $a>0, b>0$, 所以 $a+2b=(a+2b)(\frac{2}{b}+\frac{1}{a})=5+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 5+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=5+4=9$,

当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$ 且 $\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$, 即 $a=b=3$ 时, 等号成立, 所以 $a+2b$ 的最小值为 9, 故选 C。

【名师点睛】易错点睛: 利用基本不等式求最值时, 要注意其必须满足的三个条件:

- (1) “一正二定三相等”“一正”就是各项必须为正数;
- (2) “二定”就是要求的最小值, 必须把构成和的二项之积转化成定值; 要求积的最大值, 则必须把构成积的因式的和转化成定值;
- (3) “三相等”是利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号则这个定值就不是所求的最值, 这也是最容易发生错误的地方。

【例 2】若正数 m, n 满足 $2m+n=1$, 则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为

- A. $3+2\sqrt{2}$ B. $3+\sqrt{2}$ C. $2+2\sqrt{2}$ D. 3

【答案】A

【解析】由题意, 因为 $2m+n=1$, 则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\cdot(2m+n)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geq 3+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$, 即 $n=\sqrt{2}m$ 时等号成立, 所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$, 故选 A。

【名师点睛】本题主要考查了利用基本不等式求最小值问题, 其中解答中合理构造, 利用基本不等式准确运算是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题。

【例 3】已知 $x<\frac{5}{4}$, 求 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值。

【解析】因为 $x<\frac{5}{4}$, 所以 $5-4x>0$, 则 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left[5-4x+\frac{1}{5-4x}\right]+3\leq -2\sqrt{5-4x}\cdot\sqrt{\frac{1}{5-4x}}+3$

$=-2+3=1$. 当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立. 故 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为 1.

考查线性规划:

【例 1】(2021·江西五市九校协作体联考)若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y - 4 \leq 0 \\ x + 2y - 4 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + 4y$ 的最小值为()

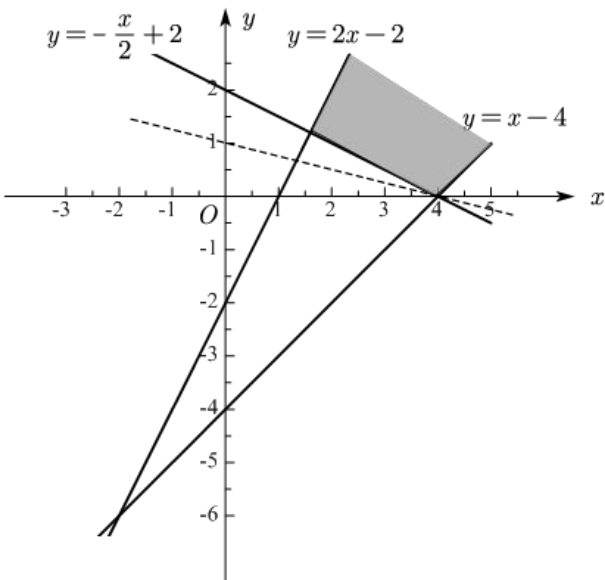
- A. 26 B. 4 C. $\frac{26}{5}$ D. -26

【答案】B

【解析】由题意可知, 如上图, 不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示(包含边界), 目标函数 $z = x + 4y$

变为 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z$, 当直线 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z$ 经过点 $(4, 0)$ 时, z 值最小, $\frac{1}{4}z = 1$, 故 $z_{\min} = 4$, 故选 B.

【名师点睛】易错点睛: 本题由于三条直线能够围成一个三角形, 很自然的会将其看作是可行域, 实际上, 在判断可行域时, 一定要验证一下原点是否在可行域内再确定.



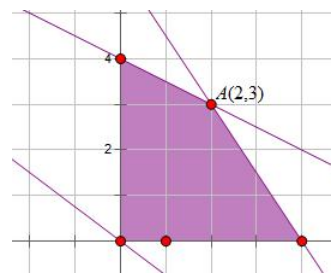
【例 2】某企业生产甲、乙两种产品均需用 A, B 两种原料. 已知生产 1 吨每种产品需原料及每天原料的可用限额如表所示, 如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元, 则该企业每天可获得最大利润为()

- A. 12 万元 B. 16 万元 C. 17 万元 D. 18 万元

	甲	乙	原料限额
A(吨)	3	2	12
B(吨)	1	2	8

【答案】D

【解析】设该企业每天生产甲、乙两种产品分别为 x 、 y 吨, 则利润



$$z = 3x + 4y, \text{ 由题意可列 } \begin{cases} 3x + 2y \leq 12 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ 其表示如图阴影部分区域:}$$

当直线 $3x + 4y - z = 0$ 过点 $A(2, 3)$ 时, z 取得最大值, 所以

$$z_{\max} = 3 \times 2 + 4 \times 3 = 18, \text{ 故选 D.}$$

考查数列与不等式:

【例 1】(2021·广东湛江·模拟) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{n+1} - a_n > 0$, $a_2 = 3$, 且 $a_1, a_3, 12 + a_7$ 成等比数列.

(1) 求 a_n 和 S_n ;

(2) 设 $b_n = \sqrt{\frac{1}{S_n S_{n+1}}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{2} \leq T_n < 1$.

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 首项为 a_1 , 由 $a_{n+1} - a_n > 0$, 得 $d > 0$,

$$\text{则 } \begin{cases} a_2 = 3, \\ a_3^2 = a_1(12 + a_7), \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} a_1 + d = 3, \\ (a_1 + 2d)^2 = a_1(12 + a_1 + 6d). \end{cases}$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 2, \text{ 所以 } a_n = 2n - 1, S_n = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2.$$

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \sqrt{\frac{1}{S_n S_{n+1}}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ 所以 } T_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

$$\text{因为 } T_n = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ 单调递增. 所以 } T_n \geq T_1 = \frac{1}{2}, \text{ 综上, } \frac{1}{2} \leq T_n < 1.$$

【名师点睛】方法点睛: 数列求和的方法

(1) 倒序相加法: 如果一个数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中首末两端等距离的两项的和相等或等于同一个常数, 那么求这个数列的前 n 项和即可以用倒序相加法

(2) 错位相减法: 如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的, 那么这个数列的前 n 项和即可以用错位相减法来求;

(3) 裂项相消法: 把数列的通项拆成两项之差, 在求和时, 中间的一些项可相互抵消, 从而求得其和;

(4) 分组转化法: 一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列; 或可求和的数列组成, 则求和时可用分组转化法分别求和再相加;

(5) 并项求和法：一个数列的前 n 项和可以两两结合求解，则称之为并项求和，形如 $a_n=(-1)^nf(n)$ 类型，可采用两项合并求解。

考查导数与不等式：

【例 1】已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$ ，证明：当 $a \geq 1$ 时， $f(x)+e \geq 0$ 。

【证明】由题意：原不等式等价于： $e^{x+1}+ax^2+x-1 \geq 0$ 恒成立；令 $g(x)=e^{x+1}+ax^2+x-1$ ，

$\therefore g'(x)=e^{x+1}+2ax+1$ ， $g''(x)=e^{x+1}+2a$ ， $\because a \geq 1$ ， $\therefore g''(x) > 0$ 恒成立， $\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增， $\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一 x_0 使 $g'(x_0)=0$ ， $\therefore e^{x_0+1}+2ax_0+1=0$ ，即 $e^{x_0+1}=-2ax_0-1$ ，且 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增， $\therefore g(x) \geq g(x_0)$ 。

又 $g(x_0)=e^{x_0+1}+ax_0^2+x_0-1=ax_0^2+(1-2a)x_0-2=(ax_0+1)(x_0-2)$ ， $g'(-\frac{1}{a})=e^{1-\frac{1}{a}}-1$ ，

$\because a \geq 1$ ， $\therefore 0 \leq e^{1-\frac{1}{a}}-1 < e-1$ ， $\therefore x_0 \leq -\frac{1}{a}$ ， $\therefore g(x_0) \geq 0$ ，综上所述：当 $a \geq 1$ 时， $f(x)+e \geq 0$ 。

【例 2】已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$ ， $g(x)=e^x+\sin x+\cos x$ 。

(1) 证明：当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时， $f(x) \neq 0$ ；

(2) 若 $g(x) \neq 2+ax$ ，求 a 。

【解析】(1) 分类讨论：

①. 当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ ， $f(x)=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$ ；

②. 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 时， $f'(x)=e^x-\cos x+\sin x$ ， $f'(0)=0$ ，

$f''(x)=e^x+\sin x+\cos x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$ ，

则函数 $f'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 上单调增，则 $f'(x) < f'(0)=0$ ，

则函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 上单调减, 则 $f(x) > f(0) = 0$;

③. 当 $x = 0$ 时, 由函数的解析式可知 $f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$,

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 令 $H(x) = -\sin x + x (x \geq 0)$, 则 $H'(x) = -\cos x + 1 \geq 0$,

故函数 $H(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 从而: $H(x) \geq H(0) = 0$, 即 $-\sin x + x \geq 0, -\sin x \geq -x$,

从而函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x \geq e^x - x - 1$,

令 $y = e^x - x - 1$, 则: $y' = e^x - 1$, 当 $x \geq 0$ 时, $y' \geq 0$, 故 $y = e^x - x - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 故函数的最小

值为 $y_{\min} = e^0 - 0 - 1 = 0$, 从而: $e^x - x - 1 \geq 0$. 从而函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x \geq e^x - x - 1 \geq 0$;

综上所述, 题中的结论成立.

(2) 当 $x > -\frac{5}{4}\pi$ 时, 令 $h(x) = g(x) - ax - 2 = e^x + \sin x + \cos x - ax - 2$,

则 $h'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a$, $h''(x) = f(x) > 0$, 故 $h'(x)$ 单调递增,

当 $a > 2$ 时, $h'(0) = 2 - a < 0$, $h'(\ln(a+2)) = 2 - \sqrt{2} \sin\left[\ln(a+2) - \frac{\pi}{4}\right] > 0$,

$\exists x_1 \in (0, \ln(a+2))$ 使得 $h'(x_1) = 0$,

当 $0 < x < x_1$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, $h(x) < h(0) = 0$ 不符合题意;

当 $a < 2$ 时, $h'(0) > 0$, 若在 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ 上, 总有 $h'(x) \geq 0$ (不恒为零), 则 $h(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{4}, +\infty\right)$ 上为增

函数, 但 $h(0) = 0$, 故当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ 时, $h(x) < 0$, 不合题意.

故在 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ 上, $h'(x) < 0$ 有解, 故 $\exists x_2 \in \left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$, 使得 $h'(x_2) = 0$, 且当 $x_2 < x < 0$ 时,

$h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 故当 $x \in (x_2, 0)$ 时, $h(x) < h(0) = 0$, 不符合题意;

故 $a < 2$ 不符合题意, 当 $a = 2$ 时, $h'(x) = e^x + \cos x - \sin x - 2$, 由于 $h'(x)$ 单调递增, $h'(0) = 0$, 故:

$-\frac{5}{4}\pi < x < 0$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 此时 $h(x) \geq h(0) = 0$;

当 $x \cdot -\frac{5\pi}{4}$ 时, $h(x) = e^x + \sin x + \cos x - 2x - 2 \geq 0 - \sqrt{2} + \frac{5}{2}\pi - 2 > 0$, 综上可得, $a=2$.

【名师点睛】对于利用导数研究不等式问题的求解策略:

- (1) 通常要构造新函数, 利用导数研究函数的单调性, 求出最值, 从而求出参数的取值范围;
- (2) 利用可分离变量, 构造新函数, 直接把问题转化为函数的最值问题;
- (3) 根据恒成求解参数的取值时, 一般涉及分离参数法, 但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况, 通常要设出导数的零点, 难度较大.

讲题型

不等式恒成立问题

分离参数求参数取值范围

【例 1】已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - e^2x$. 若 $x > 0$ 时, 总有 $f(x) > -e^2x$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】由 $f(x) > -e^2x$ 得 $a > -\frac{e^x}{x^2}$. 设 $g(x) = -\frac{e^x}{x^2}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(2-x)}{x^3}$. 所以当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $g(x) \leq g(2) = -\frac{e^2}{4}$. 因此, a 的取值范围是 $\left[-\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$.

小结: 利用导数研究含参数的不等式问题, 若能够分离参数, 则常将问题转化为形如 $a \geq f(x)$ (或 $a \leq f(x)$) 的形式, 通过求函数 $y = f(x)$ 的最值得参数范围. 恒成立问题的求解方法: $a \geq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立, 则 $a \geq f(x)_{\max}(x \in D)$; $a \leq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立, 则 $a \leq f(x)_{\min}$.

转化法求参数范围

【例 2】设函数 $f(x) = a^2 \ln x + ax (a \neq 0)$, $g(x) = x^2$, $F(x) = g(x) - f(x)$.

(1) 试讨论 $F(x)$ 的单调性. (2) 当 $a > 0$ 时, $-e^2 \leq F(x) \leq 1 - e$ 在 $x \in [1, e]$ 恒成立, 求实数 a 的取值.

【解析】(1) 由题意得: $g(x) = x^2$, 所以 $F(x) = g(x) - f(x) = x^2 - a^2 \ln x - ax (x > 0)$,

$$F'(x) = 2x - \frac{a^2}{x} - a = \frac{2x^2 - ax - a^2}{x},$$

$a > 0$ 时, $x \in (0, a)$ 时, $F'(x) < 0$, $x \in (a, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

所以函数 $F(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在区间 $(a, +\infty)$ 单调递增;

$a < 0$ 时, $x \in \left[0, -\frac{a}{2}\right]$ 时, $F'(x) < 0$, $x \in \left[-\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 时, $F'(x) > 0$,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $\left[0, -\frac{a}{2}\right]$ 单调递减, 在 $\left[-\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 单调递增,

综上, $a > 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增;

$a < 0$ 时, 函数 $F(x)$ 在区间 $\left[0, -\frac{a}{2}\right]$ 单调递减, 在区间 $\left[-\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 单调递增.

(2) 由题意得 $F(1) = g(1) - f(1) = 1 - a \leq 1 - e$, 即 $a \geq e$, 当 $a > 0$ 时, 由(1)得 $F(x)$ 在 $[1, e]$ 内单调递减,

故要使 $-e^2 \leq F(x) \leq 1 - e$ 在 $x \in [1, e]$ 恒成立, 只需 $\begin{cases} F(1) \leq 1 - e, \\ F(e) \geq -e^2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1 - a \leq 1 - e, \\ e^2 - a^2 - ae \geq -e^2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \geq e, \\ a \leq e, \end{cases}$ 即

$a = e$.

小结: 破解此类题需“一形一分类”, “一形”是指会结合函数的图象, 对函数进行求导, 然后判断其极值, 从而得到含有参数的方程组, 解方程组, 即可求出参数的值; “一分类”是指对不等式恒成立问题, 常需对参数进行分类讨论, 求出参数的取值范围.

不等式能成立问题

含参数的能成立(存在型)问题

【例 1】已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + 10$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程.

(2) 在区间 $[1, 2]$ 内至少存在一个实数 x , 使得 $f(x) < 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^3 - x^2 + 10$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 2x$. 所以 $k = f'(2) = 8$.

又 $f(2) = 14$, 所以切线方程为 $y = 8x - 2$.

(2) 由已知得: $a > \frac{x^3 + 10}{x^2} = x + \frac{10}{x^2}$, 设 $g(x) = x + \frac{10}{x^2} (1 \leq x \leq 2)$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{20}{x^3}$, 因为 $1 \leq x \leq 2$,

所以 $g'(x) < 0$. 所以 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{9}{2}$, $a > \frac{9}{2}$,

即 a 的取值范围是 $\left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

小结: 含参数的能成立(存在型)问题的解题方法

(1) $a \geq f(x)$ 在 $x \in D$ 上能成立, 则 $a \geq f(x)_{\min}$; (2) $a \leq f(x)$ 在 $x \in D$ 上能成立, 则 $a \leq f(x)_{\max}$.

含有全称量词与存在量词的不等式问题

【例 2】已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \ln x - mx (m \in \mathbb{R})$, $g(x) = x - \frac{a}{x} (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $m = \frac{1}{2e^2}$, 对 $\forall x_1, x_2 \in [2, 2e^2]$ 都有 $g(x_1) \geq f(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $f(x) = \frac{1}{2} \ln x - mx, x > 0$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{2x} - m$,

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $m > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2m}$; 由 $\begin{cases} f'(x) > 0, \\ x > 0 \end{cases}$ 得 $0 < x < \frac{1}{2m}$; 由 $\begin{cases} f'(x) < 0, \\ x > 0 \end{cases}$ 得 $x > \frac{1}{2m}$.

综上所述, 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $m>0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[0, \frac{1}{2m}\right]$, 单调递减区间为 $\left[\frac{1}{2m}, +\infty\right)$.

(2) 若 $m = \frac{1}{2e^2}$, 则 $f(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2e^2} x$. 对 $\forall x_1, x_2 \in [2, 2e^2]$ 都有 $g(x_1) \geq f(x_2)$ 成立, 等价于对 $\forall x \in [2, 2e^2]$ 都

有 $g(x)_{\min} \geq f(x)_{\max}$, 由(1)知在 $[2, 2e^2]$ 上 $f(x)$ 的最大值为 $f(e^2) = \frac{1}{2}$, $g'(x) = 1 + \frac{a}{x^2} > 0 (a > 0)$, $x \in [2, 2e^2]$, 函

数 $g(x)$ 在 $[2, 2e^2]$ 上是增函数, $g(x)_{\min} = g(2) = 2 - \frac{a}{2}$, 由 $2 - \frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}$, 得 $a \leq 3$, 又 $a > 0$, 所以 $a \in (0, 3]$, 即

实数 a 的取值范围是 $(0, 3]$.

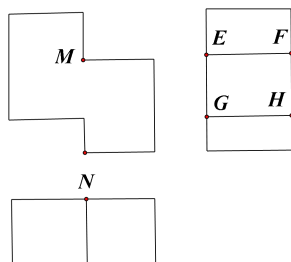
小结: 含全称、存在量词不等式恒成立问题的方法

1. 存在 $x_1 \in A$, 任意 $x_2 \in B$ 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}$.
2. 任意 $x_1 \in A$, 存在 $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$.
3. 任意 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$.
4. 存在 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \leq g(x)_{\max}$.

专题 09 立体几何

讲高考

1. 【高考全国 II 卷理数 7】如图是一个多面体的三视图, 这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为 M , 在俯视图中对应的点为 N , 则该端点在侧视图中对应的点为 ()

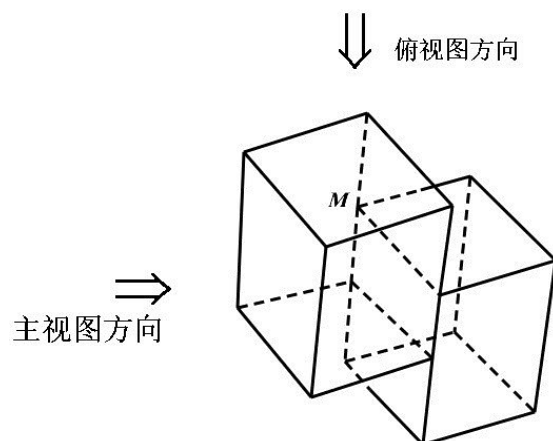


- A. E B. F C. G D. H

【答案】A

【思路导引】根据三视图, 画出多面体立体图形, 即可求得 M 点在侧视图中对应的点.

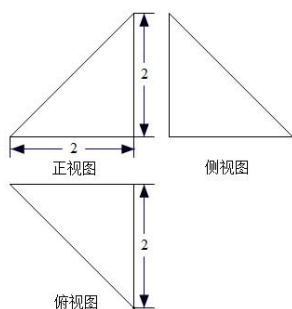
【解析】根据三视图, 画出多面体立体图形,



图中标出了根据三视图 M 点所在位置，可知在侧视图中所对应的点为 E ，故选：A.

【专家解读】本题的特点是注重空间想象能力的考查，本题考查了根据三视图判断点的位置，考查直观想象学科素养. 解题关键是掌握三视图的基础知识和根据三视图能还原立体图形的方法.

2. 【高考全国III卷理数8】如图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是 ()

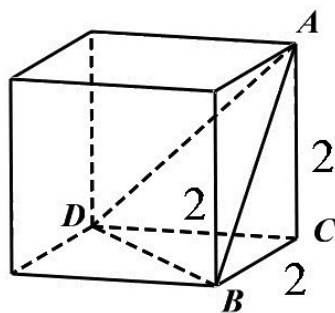


- A. $6+4\sqrt{2}$ B. $4+4\sqrt{2}$ C. $6+2\sqrt{3}$ D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】C

【思路导引】根据三视图特征，在正方体中截取出符合题意的立体图形，求出每个面的面积，即可求得其表面积.

【解析】根据三视图特征，在正方体中截取出符合题意的立体图形，



根据立体图形可得： $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ，根据勾股定理可得： $AB = AD = DB = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle ADB$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形，根据三角形面积公式可得：

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \therefore \text{该几何体的表面积是: } 3 \times 2 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}, \text{ 故选}$$

C.

【专家解读】本题的特点是注重空间想象能力的考查，本题考查了根据三视图求立体图形的表面积问题，考查数学运算、直观想象等学科素养，解题关键是掌握三视图的基础知识和根据三视图能还原立体图形的方法。

3. 【高考全国 I 卷理 3】埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为 ()



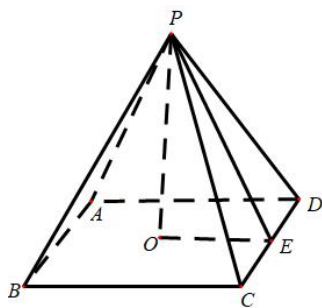
- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【思路导引】设 $CD = a, PE = b$ ，利用 $PO^2 = \frac{1}{2} CD \cdot PE$ 得到关于 a, b 的方程，解方程即可得到答案。

【解析】如图，设 $CD = a, PE = b$ ，则 $PO = \sqrt{PE^2 - OE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ ，由题意 $PO^2 = \frac{1}{2} ab$ ，即 $b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2} ab$ ，

化简得 $4(\frac{b}{a})^2 - 2 \cdot \frac{b}{a} - 1 = 0$ ，解得 $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ （负值舍去），故选 C.



【专家解读】本题的特点是注重正棱锥中截面直角三角形的应用，本题考查了正四棱锥的概念及面积的计算，考查正四棱锥中截面的性质，考查数学运算、直观想象等学科素养，正确应用截面性质是解题的关键。

4. 【高考全国 I 卷理数 10】已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点， $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆．若 $\odot O_1$ 的面

积为 4π , $AB = BC = AC = OO_1$, 则球 O 的表面积为 ()

- A. 64π B. 48π C. 36π D. 32π

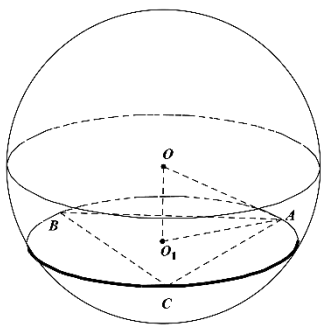
【答案】A

【思路导引】由已知可得等边 $\triangle ABC$ 的外接圆半径, 进而求出其边长, 得出 OO_1 的值, 根据球截面性质, 求出球的半径, 即可得出结论.

【解析】设圆 O_1 半径为 r , 球的半径为 R , 依题意, 得 $\pi r^2 = 4\pi$, $\therefore r = 2$,

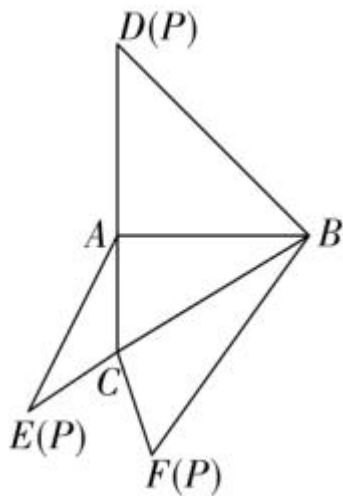
由正弦定理可得 $AB = 2r \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, $\therefore OO_1 = AB = 2\sqrt{3}$, 根据圆截面性质 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore OO_1 \perp O_1A$, $R = OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{OO_1^2 + r^2} = 4$, $\therefore$ 球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$, 故选 A.



【专家解读】本题的特点是多面体与球的位置关系, 本题考查了三棱锥的外接球, 考查球的表面积公式, 考查数学运算、数学直观等学科素养. 解题关键是正确应用球的截面性质.

5. 【高考全国 I 卷理数 16】如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中, $AC = 1$, $AB = AD = \sqrt{3}$, $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $\angle CAE = 30^\circ$, 则 $\cos \angle FCB =$ _____.



【答案】 $-\frac{1}{4}$

【思路导引】在 $\triangle ACE$ 中，利用余弦定理可求得 CE ，可得出 CF ，利用勾股定理计算出 BC 、 BD ，可得出 BF ，然后在 $\triangle BCF$ 中利用余弦定理可求得 $\cos \angle FCB$ 的值.

【解析】 $\because AB \perp AC$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $AC = 1$ ，由勾股定理得 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2$ ，

同理得 $BD = \sqrt{6}$ ， $\therefore BF = BD = \sqrt{6}$ ，在 $\triangle ACE$ 中， $AC = 1$ ， $AE = AD = \sqrt{3}$ ， $\angle CAE = 30^\circ$ ，

由余弦定理得 $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cos 30^\circ = 1 + 3 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ ， $\therefore CF = CE = 1$ ，

在 $\triangle BCF$ 中， $BC = 2$ ， $BF = \sqrt{6}$ ， $CF = 1$ ，

由余弦定理得 $\cos \angle FCB = \frac{CF^2 + BC^2 - BF^2}{2CF \cdot BC} = \frac{1 + 4 - 6}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{4}$ ，故答案为： $-\frac{1}{4}$.

【专家解读】本题的特点是注重空间角的计算，本题考查了利用余弦定理解三角形，考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是选择合适的三角形，利用余弦定理解决问题.

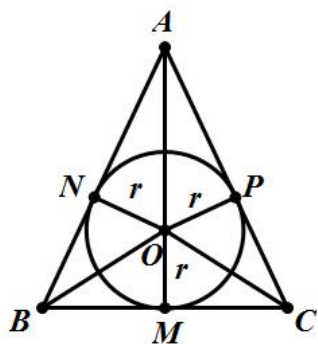
6. 【高考全国III卷理数15】已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【思路导引】将原问题转化为求解圆锥内切球的问题，然后结合截面确定其半径即可确定体积的值.

【解析】解法一：易知半径最大球为圆锥的内切球，球与圆锥内切时的轴截面如图所示，

其中 $BC = 2$ ， $AB = AC = 3$ ，且点 M 为 BC 边上的中点，设内切圆的圆心为 O ，

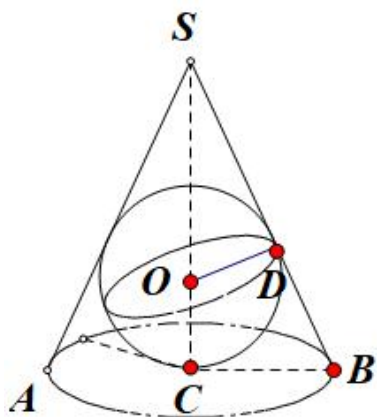


由于 $AM = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，设内切圆半径为 r ，则：

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times AB \times r + \frac{1}{2} \times BC \times r + \frac{1}{2} \times AC \times r = \frac{1}{2} \times (3 + 3 + 2) \times r = 2\sqrt{2},$$

解得: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 其体积: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. 故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

解法二: 分析知圆锥内半径最大的球的应为该圆锥的内切球, 如图, 由题可知该圆锥的母线长为 $BS = 3$, 底面半径为 $BC = 1$, 高为 $SC = \sqrt{BS^2 - BC^2} = 2\sqrt{2}$, 不妨设该内切圆与母线 BS 切于 D 点,



令 $OD = OC = r$, 则由 $\triangle SOD \sim \triangle SBC$, 可得 $\frac{OD}{OS} = \frac{BC}{BS}$, 即 $\frac{r}{2\sqrt{2}-r} = \frac{1}{3}$, 得 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

【专家解读】本题的特点是圆锥与球的位置关系, 本题考查了圆锥内切球, 考查球的体积公式, 考查数学运算、数学直观、数学建模等学科素养. 解题关键是认真分析图形, 明确切点和接点的位置, 确定有关元素间的数量关系, 正确作出截面, 构造直角三角形, 应用勾股定理解题.

讲考向

一、考向分析:



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
	1、空间几何体表面积的法 (1) 以三视图为载体的几何体的表面积问题, 关键是分析三视图确定几何体中各元素之间的位置关系及数量。 (2) 多面体的表面积是各个面的面积之和; 组合体的表面积注意衔接部分的处理。

几何 体表 面积 与体 积	(3) 旋转体的表面积问题注意其侧面展开图的应用。 2. 求空间几何体体积的常用方法: (1) 公式法(适用于规则几何体)。 (2) 割补法(适用于不规则的几何体, 有时对不易求体积的规则几何体也用此法)。 (3) 等体积转化法(适用于求三棱锥的体积)。 3. 求空间几何体的体积最值的常用方法: (1) 几何法: 由图形的特殊位置确定最值, 如垂直。 (2) 基本不等式法: 根据条件建立两个变量的和或积为定值, 利用基本不等式求体积的最值。 (3) 函数法: 通过建立相关函数式, 将所求的最值问题转化为函数的最值问题求解, 此法应用最为广泛。
三视图	1、根据三视图还原几何体 (1) 对柱、锥、台、球的三视图要熟悉。 (2) 明确三视图的形成原理, 并能结合空间想象将三视图还原为直观图。 (3) 根据三视图的形状及相关数据推断出原几何图形中的点、线、面之间的位置关系及相关数据。 提醒: 对于简单组合体的三视图, 首先要确定正视、侧视、俯视的方向, 其次要注意组合体由哪些几何体组成, 弄清它们的组成方式, 特别应注意它们的交线的位置, 区分好实线和虚线的不同。 2、由三视图还原几何体的三个步骤: 第一步, 先画长(正)方体, 在长(正)方体中画出俯视图; 第二步, 在三个视图中找到直角; 第三步, 判断直角位置, 并向上(或向下)做垂线, 找到顶点, 连线即可。
平行问题	1. 判定线面平行的四种方法 (1) 利用线面平行的定义(无公共点)。 (2) 利用线面平行的判定定理($a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$)。 (3) 利用面面平行的性质定理($\alpha \parallel \beta, a \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \beta$)。 (4) 利用面面平行的性质($\alpha \parallel \beta, a \not\subset \alpha, a \not\subset \beta, a \parallel \alpha \Rightarrow a \parallel \beta$)。 2. 在应用线面平行的判定定理进行平行转化时, 一定注意定理成立的条件, 通常应严格按照定理成立的条件规范书写步骤, 如: 把线面平行转化为线线平行时, 必须说清经过已知直线的平面和已知平面相交, 这时才有直线与交线平行。

	3、证明面面平行的方法 (1) 面面平行的定义。 (2) 面面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。 (3) 利用垂直于同一条直线的两个平面平行。 (4) 两个平面同时平行于第三个平面，那么这两个平面平行。 (5) 利用“线线平行”、“线面平行”、“面面平行”的相互转化。 4. 三种平行关系的转化： 判定定理 判定定理 线线平行性质定理 线面平行 性质 面面平行性质定理 线线平行、线面平行、面面平行的相互转化是解决与平行有关的证明题的指导思想，解题中既要注意一般的转化规律，又要看清题目的具体条件，选择正确的转化方向。
垂直问题	1、证明直线和平面垂直的常用方法 (1)利用判定定理。(2)利用平行线垂直于平面的传递性($a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$)。 (3)利用面面平行的性质($a \perp \alpha, \alpha \parallel \beta \Rightarrow a \perp \beta$)。(4)利用面面垂直的性质。 2、证明面面垂直的主要方法 ①利用判定定理。在审题时要注意直观判断哪条直线可能是垂线，充分利用等腰三角形底边上的中线垂直于底边，勾股定理的逆定理等。②用定义证明。只需判定两平面所成二面角为直二面角。③客观题中，也可应用：两个平行平面中的一个垂直于第三个平面，则另一个也垂直于第三个平面。 3、必记结论： (1)直线与平面垂直的定义常常逆用，即 $a \perp \alpha, b \subset \alpha \Rightarrow a \perp b$。 (2)若平行直线中一条垂直于平面，则另一条也垂直于该平面。 (3)垂直于同一条直线的两个平面平行。(4)过一点有且只有一条直线与已知平面垂直。 (5)过一点有且只有一个平面与已知直线垂直。 4、垂直关系综合题的类型及解法 (1) 三种垂直的综合问题，一般通过作辅助线进行线线、线面、面面垂直间的转化。 (2) 垂直与平行结合问题，求解时应注意平行、垂直的性质及判定的综合应用。 (3) 垂直与体积结合问题，在求体积时，可根据线面垂直得到表示高的线段，进而求得体积。

空间角	1. 向量法求异面直线所成角的方法 (1) 选好基底或建立空间直角坐标系。 (2) 求出两直线的方向向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, 代入公式 $\cos \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{ \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 }{ \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 }$ 求解。 提醒: 两异面直线所成角 θ 的范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 两向量的夹角 α 的范围是 $[0, \pi]$, 当两异面直线的方向向量的夹角为锐角或直角时, 就是该异面直线的夹角; 当两异面直线的方向向量的夹角为钝角时, 其补角才是异面直线的夹角。 2. 向量法求线面角的两大途径 (1) 分别求出斜线和它所在平面内的射影直线的方向向量, 转化为求两个方向向量的夹角(或其补角)。 (2) 通过平面的法向量来求, 即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角, 取其余角就是斜线和平面所成的角。 3、(1) 利用向量法计算二面角大小的常用方法 ①找法向量法: 分别求出二面角的两个半平面所在平面的法向量, 然后通过两个平面的法向量的夹角得到二面角的大小, 但要注意结合实际图形判断所求角的大小。 ②找与棱垂直的方向向量法: 分别在二面角的两个半平面内找到与棱垂直且以垂足为起点的两个向量, 则这两个向量的夹角的大小就是二面角的大小。 (2) 已知二面角大小求值的技巧 建立恰当的空间直角坐标系, 将两平面的法向量用与待求相关的参数(字母)表示, 利用两向量的夹角公式构建方程或不等式或函数, 进而求解。 4、平面的法向量求法步骤: (1) 设平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$。 (2) 找出(求出)平面内的两个不共线的向量的坐标 $\boldsymbol{a}=(a_1, b_1, c_1), \boldsymbol{b}=(a_2, b_2, c_2)$; (3) 根据法向量的定义建立关于 x, y, z 的方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0; \end{cases}$ (4) 解方程组, 取其中的一组解, 即得法向量。
探索性问题	1、对于存在判断型问题的求解, 应先假设存在, 把要成立的结论当作条件, 据此列方程或方程组, 把“是否存在”问题转化为“点的坐标是否有解, 是否有规定范围内的解”等。 2、对于位置探究型问题, 通常借助向量, 引进参数, 综合已知和结论列出等式, 解出参数。 3、立体几何开放性问题求解方法有以下两种:

	(1)根据条件作出判断, 再进一步论证. (2)假设所求的点或线存在, 并设定参数表达已知条件, 根据题目进行求解, 若能求出参数的值且符合已知限定的范围, 则存在这样的点或线, 否则不存在.
球体	1. 正方体的外接球、内切球及与各条棱相切的球 (1)外接球: 球心是正方体中心; 半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (a 为正方体的棱长). (2)内切球: 球心是正方体中心; 半径 $r = \frac{a}{2}$ (a 为正方体的棱长). (3)与各条棱都相切的球: 球心是正方体中心; 半径 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (a 为正方体的棱长). 2. 正四面体的外接球与内切球(正四面体可以看作是正方体的一部分) (1)外接球: 球心是正四面体的中心; 半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ (a 为正四面体的棱长). (2)内切球: 球心是正四面体的中心; 半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ (a 为正四面体的棱长).

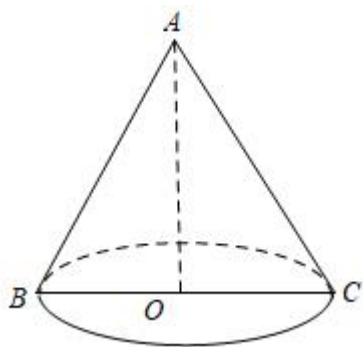
考查空间几何体的表面积与体积:

【例 1】(2021·陕西咸阳一模) 已知某圆锥的轴截面是边长为 4 的正三角形, 则它的体积为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $2\sqrt{3}\pi$

【答案】C

【解析】如图所示:



$\triangle ABC$ 为边长为 4 的正三角形, 所以 $AB=AC=BC=4$, 取 BC 中点为 O , 则 $AO = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, 所以圆锥

的体积 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. 故选 C.

【例 2】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° , 则该长方体的体积为 ()

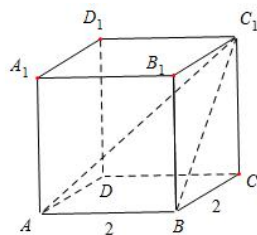
- A. 8 B. $6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】连接 AC_1 和 BC_1 ， $\because AC_1$ 与平面 BB_1C_1C 所成角为 30° ， $\therefore$

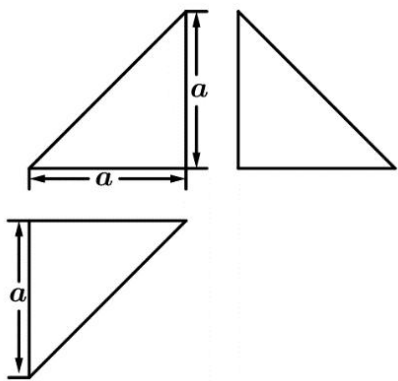
$$\angle AC_1B = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC_1} = \tan 30^\circ, BC_1 = 2\sqrt{3}, \therefore CC_1 = 2\sqrt{2}, \therefore V = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}, \text{ 故选 C.}$$



考查三视图：

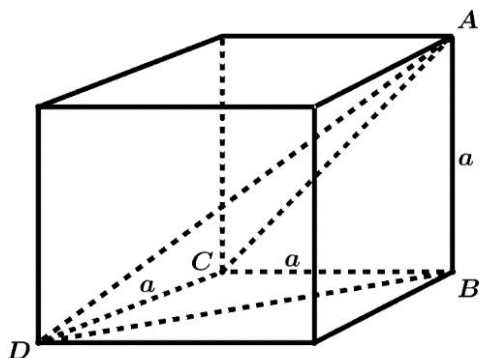
【例 1】(2021·宁夏吴忠一模) 下图为某几何体的三视图，则该几何体外接球的表面积是 ()



- A. $12\pi a^2$ B. $6\pi a^2$ C. $3\pi a^2$ D. πa^2

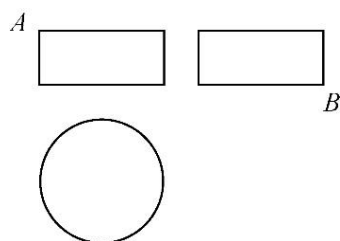
【答案】C

【解析】根据三视图可知，该几何体为如图正方体中的三棱锥 $A-BCD$ ，正方体的棱长等于 a ，三棱锥的外接球就是正方体的外接球，所以外接球的直径 $2R = \sqrt{3}a$ ，因此外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 3\pi a^2$ ，故选 C.



【例 2】某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A ，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B ，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为 ()

A. $2\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 3 D. 2



【答案】B

【解析】三视图还原几何体为一圆柱，如图，将侧面展开，最短路径为 M, N 连线的距离，所以

$$MN = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \text{ 故选 B.}$$

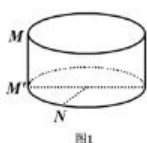


图1

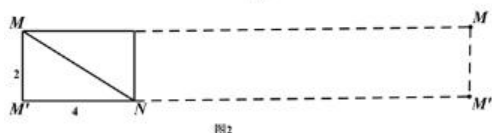
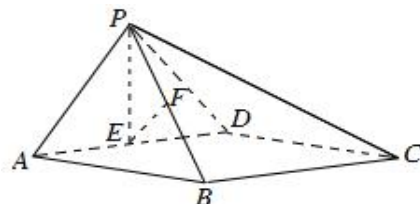


图2

考查平行、垂直问题：

【例1】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA \perp PD$ ， $PA = PD$ ， E, F 分别为 AD, PB 的中点。



(1) 求证： $PE \perp BC$ ；

(2) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ；

(3) 求证： $EF \parallel$ 平面 PCD 。

【解析】(1) $\because PA = PD$ ，且 E 为 AD 的中点， $\therefore PE \perp AD$ ，

$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形， $\therefore BC \parallel AD$ ， $\therefore PE \perp BC$ 。

(2) $\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形， $\therefore AB \perp AD$ ， $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore AB \perp$ 平面 PAD ，

$\therefore AB \perp PD$ 。又 $PA \perp PD$ ， $\because PD \perp$ 平面 PAB ， $\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD 。

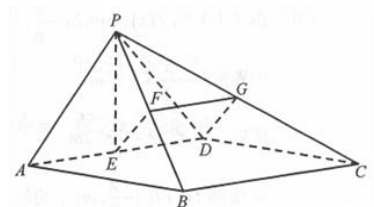
(3) 如图，取 PC 中点 G ，连接 FG, GD 。

$\because F, G$ 分别为 PB 和 PC 的中点， $\therefore FG \parallel BC$ ，且 $FG = \frac{1}{2}BC$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，且 E 为 AD 的中点， $\therefore ED \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore ED \parallel FG$ ，且 $ED = FG$ ， $\therefore$ 四边形 $EFGD$ 为平行四边形，

$\therefore EF \parallel GD$ ，又 $EF \not\subset$ 平面 PCD ， $GD \subset$ 平面 PCD ， $\therefore EF \parallel$ 平面 PCD 。

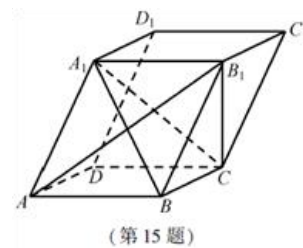


【例 2】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1=AB, AB_1 \perp B_1C_1$.

求证：(1) $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C ；(2) 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .

【解析】(1) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB \parallel A_1B_1$.

因为 $AB \not\subset$ 平面 A_1B_1C ， $A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1C ，所以 $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C .



(第 15 题)

(2) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，又因为 $AA_1=AB$ ，

所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，因此 $AB_1 \perp A_1B$. 又因为 $AB_1 \perp B_1C_1$ ， $BC \parallel B_1C_1$ ，所以 $AB_1 \perp BC$.

又因为 $A_1B \cap BC = B$ ， $A_1B \subset$ 平面 A_1BC ， $BC \subset$ 平面 A_1BC ，所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC .

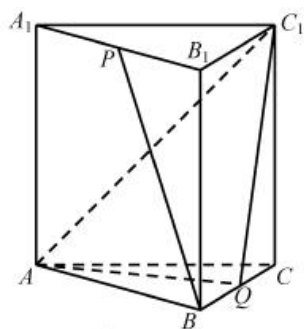
因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .

考查空间角：

【例 1】如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AA_1=2$ ，点 P，Q 分别为 A_1B_1 ，BC 的中点.

(1) 求异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值；

(2) 求直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值.



【答案】(1) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$ ；(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

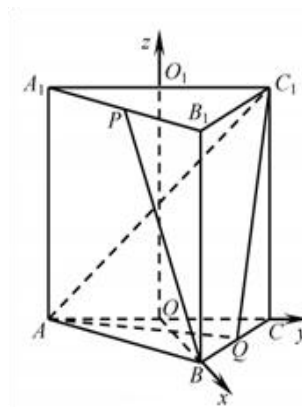
【解析】如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，设 AC ，

A_1C_1 的中点分别为 O ， O_1 ，则 $OB \perp OC$ ， $OO_1 \perp OC$ ，

$OO_1 \perp OB$ ，以 $\{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OO_1}\}$ 为基底，建立空间直角坐标系

$AB=AA_1=2$ ，

所以 $A(0, -1, 0)$ ， $B(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ， $A_1(0, -1, 2)$ ，



$O-xyz$. 因为

$B_1(\sqrt{3}, 0, 2)$ ，

$C_1(0,1,2)$.

(1) 因为 P 为 A_1B_1 的中点, 所以 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$,

从而 $\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$, $\overrightarrow{AC_1} = (0, 2, 2)$,

故 $|\cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AC_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{|-1+4|}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$.

因此, 异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

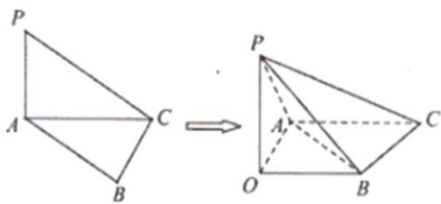
(2) 因为 Q 为 BC 的中点, 所以 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, 因此 $\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{AC_1} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 2)$. 设

$\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 AQC_1 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AQ} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$, 不妨取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, 1)$, 设直

线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CC_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以直线 CC_1 与平面

AQC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【例 2】(2021·安徽六安一模)如图, 在平面四边形 $PABC$ 中, $PA \perp AC$, $AB \perp BC$, $PA = AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$, 现把 $\triangle PAC$ 沿 AC 折起, 使 P 在平面 ABC 上的射影为 O , 连接 OA 、 OB , 且 $OB \parallel AC$.



(1) 证明: $OB \perp$ 平面 PAO ;

(2) 求二面角 $O-PB-C$ 的余弦值.

【解析】(1) $\because PO \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , $\therefore PO \perp AC$,

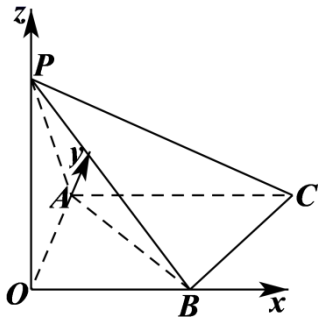
又 $PA \perp AC$, $PA \cap PO = P$, 所以 $AC \perp$ 平面 PAO , $\because OB \parallel AC$, 所以 $OB \perp$ 平面 PAO .

(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$, 则 $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 1$, $\therefore \angle BAC = 30^\circ$,

在 $Rt\triangle OAB$ 中, $\angle OAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, 所以 $OA = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OB = \frac{3}{2}$,

$Rt\triangle PAO$ 中, $PA = \sqrt{3}$, $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore OP = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \frac{3}{2}$,

以点 O 为坐标原点, OB 、 OA 、 OP 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$,



则 $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ 、 $C\left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ 、 $B\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ 、 $P\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $\vec{PB} = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$, $\vec{PC} = \left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$,

由 (1) 可知 $\vec{m} = (0, 1, 0)$ 为平面 POB 的一个法向量,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则有
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}z = 0 \\ 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ z = x \end{cases},$$

取 $x = \sqrt{3}$, 得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, \sqrt{3})$, $\cos\langle\vec{m}, \vec{n}\rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$,

由图可知, 二面角 $O-PB-C$ 为钝角, 所以, 二面角 $O-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

【点睛】思路点睛: 利用空间向量法求解二面角的步骤如下:

- (1) 建立合适的空间直角坐标系, 写出二面角对应的两个半平面中对应的点的坐标;
- (2) 设出法向量, 根据法向量垂直于平面内两条直线的方向向量, 求解出平面的法向量 (注: 若半平面为坐标平面, 直接取法向量即可);
- (3) 计算 (2) 中两个法向量的余弦值, 结合立体图形中二面角的情况, 判断二面角是锐角还是钝角, 从而得到二面角的余弦值.

考查球体:

【例 1】 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有棱的长都为 a , 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为()

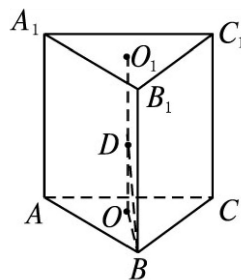
- A. πa^2 B. $\frac{7}{3} \pi a^2$ C. $\frac{11}{3} \pi a^2$ D. $5 \pi a^2$

【答案】B

【解析】如图， O_1, O 分别为上、下底面的中心， D 为 O_1O 的中点，则 DB 为球的

$$有 r = DB = \sqrt{OD^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{7a^2}{12}},$$

$$\therefore S_{表} = 4\pi r^2 = 4\pi \times \frac{7a^2}{12} = \frac{7}{3} \pi a^2.$$



半径，

【例 2】(2021·山西吕梁一模) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧面 PAD 是正三角形，且侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB = 2$ ，若四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ ，则该四棱锥的表面积为()

- A. $4\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $8\sqrt{3}$ D. $10\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】首先确定球心 O 的位置，过 O 作底面 $ABCD$ 的垂线，垂足为 M ，过 O 作三角形 APD 的垂线，垂足为 N ，过 N 作 $NE \perp AD$ ，证明四边形 $MENO$ 是平行四边形，设 $AD = 2x$ ，分别求出 OA 、 OM 、 AM 的长，利用勾股定理可得 x ，然后分别计算四个侧面和底面的面积可得答案。

【解析】设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 O ，过 O 作底面 $ABCD$ 的垂线，垂足为 M ，因为四边形 $ABCD$ 是长方形，所以 M 的底面中心，即对角线 AC 、 BD 的交点，过 O 作三角形 APD 的垂线，垂足为 N ，所以 N 是正三角形 APD 外心，

设外接球半径为 r ，外接球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$ ，所以 $r = \sqrt{2}$ ，即 $OA = \sqrt{2}$ ，

过 N 作 $NE \perp AD$ ，则 E 是 AD 的中点，连接 EM ，所以 $EM = \frac{1}{2} AB = 1$ ， $EM \perp AD$ ，因为平面 $APD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $APD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，

所以 $NE \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $NE \parallel OM$ ，所以 $EM \perp$ 平面 APD ，所以 $EM \parallel ON$ ，

所以四边形 $MENO$ 是平行四边形，即 $OM = NE$ ，设 $AD = 2x$ ，则 $AM = \sqrt{AE^2 + EM^2} = \sqrt{x^2 + 1}$ ，

$NE = \frac{1}{3} PE = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{3} x$ ，所以 $OM = NE = \frac{\sqrt{3}}{3} x$ ，由勾股定理得 $OA^2 = OM^2 + AM^2$ ，即

$$2 = \frac{1}{3} x^2 + x^2 + 1, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } AD = \sqrt{3}, S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} AD^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

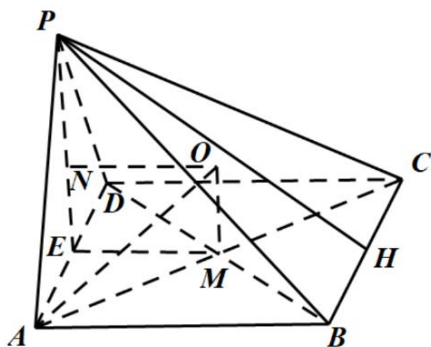
因为 $AB \parallel CD \parallel OM$ ，所以 $AB \perp$ 平面 APD ， $CD \perp$ 平面 APD ，

所以 $PA \perp AB$ ， $PD \perp CD$ ， $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times AB \times AP = \sqrt{3}$ ，

因为 $PB = PC = \sqrt{PA^2 + AB^2} = \sqrt{7}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，

作 $PH \perp BC$ 于 H ，所以 H 为 BC 的中点，所以 $PH = \sqrt{PB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{7 - \frac{3}{4}} = \frac{5}{2}$ ，所以

$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times PH \times BC = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ ， $S_{\text{矩形}ABCD} = 2\sqrt{3}$ ，所以 $S_{\text{表}} = S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} + S_{\text{矩形}ABCD} = 6\sqrt{3}$ 。故选 B。



【点睛】本题考查了球内接四棱锥的问题，关键是确定球心的位置及计算边长，考查了学生的空间想象力、推理能力和计算能力。

讲题型

立体几何中的探索性问题

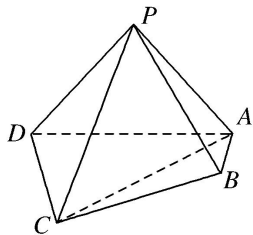
【例 1】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA \perp PD$ ， $PA = PD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = 1$ ， $AD = 2$ ， $AC = CD = \sqrt{5}$ 。

(1) 求证： $PD \perp$ 平面 PAB 。

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值。

(3) 在棱 PA 上是否存在点 M ，使得 $BM \parallel$ 平面 PCD ？若存在，求 $\frac{AM}{AP}$ 的值；若不存在，

说明理由。



【解析】(1) 证明：因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $AB \perp$ 平面 PAD 。所以 $AB \perp PD$ 。又因为 $PA \perp PD$ ， $PA \cap AB = A$ ，所以 $PD \perp$ 平面 PAB 。

(2) 取 AD 的中点 O ，连接 PO ， CO 。因为 $PA = PD$ ，所以 $PO \perp AD$ 。

又因为 $PO \subset$ 平面 PAD ，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 。因为 $CO \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PO \perp CO$ 。因为 $AC = CD$ ，所以 $CO \perp AD$ 。

如图所示, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 。

由题意得, $A(0,1,0)$, $B(1,1,0)$, $C(2,0,0)$, $D(0,-1,0)$, $P(0,0,1)$ 。

则 $\vec{CD}=(0,-1,-1)$, $\vec{CP}=(2,0,-1)$, $\vec{CB}=(1,1,-1)$,

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ 。

则即 $\begin{cases} -y-z=0, \\ 2x-z=0. \end{cases}$ 令 $z=2$, 则 $x=1, y=-2$ 。

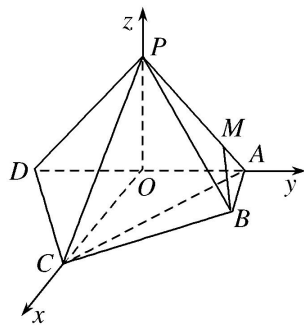
所以 $\vec{n}=(1,-2,2)$ 。又 $\vec{CB}=(1,1,-1)$, 所以 $\cos \langle \vec{n}, \vec{CB} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

所以直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(3) 设 M 是棱 PA 上一点, 则存在 $\lambda \in [0,1]$, 使得 $\vec{PM}=\lambda \vec{PA}$ 。因此点 $M(0,1-\lambda,\lambda)$, $\vec{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$ 。

因为 $\vec{BM} \perp$ 平面 PCD , 所以要使 $\vec{BM} \parallel$ 平面 PCD , 当且仅当 $\vec{BM} \cdot \vec{n}=0$, 即 $(-1,-\lambda,\lambda) \cdot (1,-2,2)=0$ 。

解得 $\lambda=\frac{1}{4}$ 。所以在棱 PA 上存在点 M 使得 $\vec{BM} \parallel$ 平面 PCD , 此时 $\frac{AM}{AP}=\frac{1}{4}$ 。



【小结】(1) 对于存在判断型问题的求解, 应先假设存在, 把要成立的结论当作条件, 据此列方程或方程组, 把“是否存在”问题转化为“点的坐标是否有解, 是否有规定范围内的解”等。

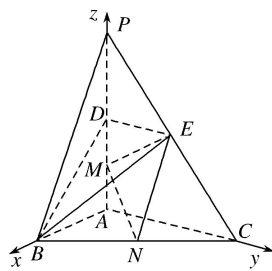
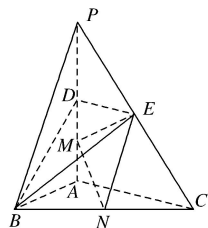
(2) 对于位置探究型问题, 通常借助向量, 引进参数, 综合已知和结论列出等式, 解出参数。

【例 2】如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC=90^\circ$ 。点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA=AC=4$, $AB=2$ 。

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BDE 。

(2) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值。

(3) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$, 求线段 AH 的长。



【解析】(1) 证明: 如图, 以点 A 为原点, 分别以 $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}$ 方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向建立空间直角坐标系, 依题意可得 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,0,2)$, $E(0,2,2)$, $M(0,0,1)$, $N(1,2,0)$ 。所以 $\vec{MN}=(1,2,-1)$, $\vec{BE}=(0,2,2)$ 。设 $\vec{n}=(x_1, y_1, z_1)$ 为平面 BDE

的法向量, 则即 $\begin{cases} 2y_1=0, \\ 2x_1-2z_1=0. \end{cases}$ 不妨设 $z_1=1$, 可得 $\vec{n}=(1,0,1)$ 。又 $\vec{MN}=(1,2,-1)$,

可得 $\vec{MN} \cdot \vec{n}=0$ 。因为 $\vec{MN} \perp$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE 。

(2) 易知 $\vec{n}_1=(1,0,0)$ 为平面 CEM 的一个法向量。设 $\vec{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$ 为平面 EMN 的法向量,

则因为 $\vec{MN}=(1,2,-1)$, $\vec{ME}=(0,2,1)$, 所以 $\begin{cases} -2y_2-z_2=0, \\ x_2+2y_2-z_2=0. \end{cases}$

不妨设 $y_2=1$, 可得 $\vec{n}_2=(-4,1,-2)$ 。因此有 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = -\frac{4\sqrt{21}}{21}$, 设二面角 $C-EM-N$ 的平面角

为 θ , 于是 $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{105}}{21}$. 所以二面角 $C-EM-N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{21}$.

(3)依题意, 设 $AH=h(0 \leq h \leq 4)$, 则 $H(0,0,h)$, 进而可得 $\overrightarrow{CH}=(-1,-2,h)$. 又 $\overrightarrow{CM}=(-2,2,2)$, 由已知, 得 $|\cos \langle \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CM} \rangle|$
 $= \frac{|\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{CH}| |\overrightarrow{CM}|} = \frac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5} \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$. 整理, 得 $10h^2-21h+8=0$, 解得 $h=\frac{8}{5}$ 或 $h=\frac{1}{2}$.

所以线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

【小结】本例中的第(3)问是由已知的线线角探究点 H 的位置, 应抓住该点所满足的特征, 从而引入参数表示其坐标. 由已知点 H 在棱 PA 上, 知此处应抓住两个关键点: 一是共线, 因为棱 PA 就在 z 轴上, 所以直接设 AH 的长度就可以得到点 H 的坐标(若直线 PA 与坐标轴不平行, 则需利用向量共线引入参数解决, 直接设 $\overrightarrow{CH}=\lambda \overrightarrow{CM}$, 然后进行坐标运算); 二是注意范围, 因为点 H 在棱 PA 上, 所以 $0 \leq AH \leq AP$, 即 $0 \leq h \leq 4$ (若引入参数 λ , 则 $0 \leq \lambda \leq 1$), 若该题中求出的 h 值超出该范围, 则应舍掉.

专题 10 解析几何

讲高考

1. 【高考全国III卷文数8】点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为 ()

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】B

【思路导引】首先根据直线方程判断出直线过定点 $P(-1,0)$, 设 $A(0,-1)$, 当直线 $y=k(x+1)$ 与 AP 垂直时, 点 A 到直线 $y=k(x+1)$ 距离最大, 即可求得结果.

【解析】由 $y=k(x+1)$ 可知直线过定点 $P(-1,0)$, 设 $A(0,-1)$,

当直线 $y=k(x+1)$ 与 AP 垂直时, 点 A 到直线 $y=k(x+1)$ 距离最大, 即为 $|AP|=\sqrt{2}$. 故选 B.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了点到直线距离公式, 考查数学运算学科素养. 解题关键是熟记公式.

2. 【高考全国I卷理数11】已知 $\odot M: x^2+y^2-2x-2y-2=0$, 直线 $l: 2x+y+2=0$, P 为 l 上的动点,

过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 ()

A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

【答案】D

【思路导引】由题意可判断直线与圆相离，根据圆的知识可知，四点 A, P, B, M 共圆，且 $AB \perp MP$ ，根据 $|PM| \cdot |AB| = 2S_{\triangle PAM} = 2|PA|$ 可知，当直线 $MP \perp l$ 时， $|PM| \cdot |AB|$ 最小，求出以 MP 为直径的圆的方程，根据圆系的知识即可求出直线 AB 的方程.

【解析】圆的方程可化为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，点 M 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|2 \times 1 + 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} > 2$ ， $\therefore$ 直线 l

与圆相离. 依圆的知识可知，四点 A, P, B, M 四点共圆，且 $AB \perp MP$ ，

$$\therefore |PM| \cdot |AB| = 2S_{\triangle PAM} = 2 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times |AM| = 2|PA|, \text{ 而 } |PA| = \sqrt{|MP|^2 - 4},$$

当直线 $MP \perp l$ 时， $|MP|_{\min} = \sqrt{5}$ ， $|PA|_{\min} = 1$ ，此时 $|PM| \cdot |AB|$ 最小.

$$\therefore MP: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ 由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ 解得, } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$\therefore$ 以 MP 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x+1) + y(y-1) = 0$ ，即 $x^2 + y^2 - y - 1 = 0$ ，两圆的方程相减可得：

$2x + y + 1 = 0$ ，即为直线 AB 的方程，故选 D.

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了考查直线与圆，圆与圆的位置关系的应用，以及圆的几何性质的应用，考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是圆的几何性质的应用.

3. 【高考全国III卷文数6】在平面内， A, B 是两个定点， C 是动点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$ ，则点 C 的轨迹为

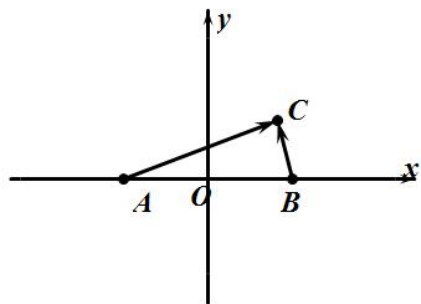
()

- A. 圆 B. 椭圆 C. 抛物线 D. 直线

【答案】A

【思路导引】首先建立平面直角坐标系，然后结合数量积的定义求解其轨迹方程即可.

【解析】设 $AB = 2a (a > 0)$ ，以 AB 中点为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系，



则: $A(-a, 0), B(a, 0)$, 设 $C(x, y)$, 可得: $\vec{AC} = (x+a, y), \vec{BC} = (x-a, y)$,

从而: $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (x+a)(x-a) + y^2$, 结合题意可得: $(x+a)(x-a) + y^2 = 1$,

整理可得: $x^2 + y^2 = a^2 + 1$, 即点 C 的轨迹是以 AB 中点为圆心, $\sqrt{a^2 + 1}$ 为半径的圆. 故选 A.

【专家解读】 本题的特点是注重基础, 本题考查了平面向量及其数量积的坐标运算, 轨迹方程的求解等知识, 考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是掌握圆锥曲线的定义及轨迹方程的求解.

4. 【高考全国 I 卷文数 6】已知圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$, 过点 $(1, 2)$ 的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为

()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【思路导引】 根据直线和圆心与点 $(1, 2)$ 连线垂直时, 所求的弦长最短, 即可得出结论.

【解析】 圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 化为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$, $\therefore$ 圆心 C 坐标为 $C(3, 0)$, 半径为 3,

设 $P(1, 2)$, 当过点 P 的直线和直线 CP 垂直时, 圆心到过点 P 的直线的距离最大, 所求的弦长最短,

根据弦长公式最小值为 $2\sqrt{9 - |CP|^2} = 2\sqrt{9 - 8} = 2$, 故选 B.

【专家解读】 本题的特点是注重基础, 本题考查了考查直线与圆位置关系的应用, 考查圆的几何性质的应用, 考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是圆的几何性质及勾股定理的应用.

5. 【高考全国 I 卷理数 4】已知 A 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 12, 到 y

轴的距离为 9, 则 $p =$

()

A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

【答案】C

【思路导引】 利用抛物线的定义建立方程即可得到答案.

【解析】设抛物线的焦点为 F ，由抛物线的定义知 $|AF| = x_A + \frac{p}{2} = 12$ ，即 $12 = 9 + \frac{p}{2}$ ，解得 $p = 6$ ，故选 C.

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了考查直线与圆，圆与圆的位置关系的应用，以及圆的几何性质的应用，考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是应用抛物线的定义解题.

6. 【高考全国 I 卷文数 11】设 F_1, F_2 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点， O 为坐标原点，点 P 在 C 上且

$|OP| = 2$ ，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

【答案】B

【思路导引】由 $\triangle PF_1F_2$ 是以 P 为直角直角三角形得到 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16$ ，再利用双曲线的定义得到 $\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2$ ，联立即可得到 $|PF_1| |PF_2|$ ，代入 $S_{\triangle F_1F_2P} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2|$ 中计算即可.

【解析】由已知，不妨设 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ ，则 $a=1, c=2$ ， $\therefore |OP| = 1 = \frac{1}{2} |F_1F_2|$ ，

$\therefore$ 点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，即 $\triangle F_1F_2P$ 是以 P 为直角顶点的直角三角形，

故 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16$ ，又 $\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a = 2$ ，

$\therefore 4 = \left| |PF_1| - |PF_2| \right|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2 |PF_1| |PF_2| = 16 - 2 |PF_1| |PF_2|$ ，

解得 $|PF_1| |PF_2| = 6$ ， $\therefore S_{\triangle F_1F_2P} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 3$ ，故选 B.

【专家解读】本题的特点是注重双曲线的基本应用，本题考查了双曲线标准方程及其几何性质，考查双曲线中焦点三角面积的计算问题，考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是双曲线的定义的应用.

7. 【高考山东卷 9】已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$ ()

- A. 若 $m > n > 0$ ，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上
 B. 若 $m = n > 0$ ，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$
 C. 若 $mn < 0$ ，则 C 是双曲线，其渐进线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$
 D. 若 $m = 0, n > 0$ ，则 C 是两条直线

【答案】ACD

【思路导引】结合选项进行逐项分析求解， $m > n > 0$ 时表示椭圆， $m = n > 0$ 时表示圆， $mn < 0$ 时表示双曲线， $m = 0, n > 0$ 时表示两条直线.

【解析】对于 A，若 $m > n > 0$ ，则 $mx^2 + ny^2 = 1$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$ ，

因为 $m > n > 0$ ，所以 $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ ，即曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 正确；

对于 B，若 $m = n > 0$ ，则 $mx^2 + ny^2 = 1$ 可化为 $x^2 + y^2 = \frac{1}{n}$ ，此时曲线 C 表示圆心在原点，半径为 $\frac{\sqrt{n}}{n}$ 的圆，

故 B 不正确；

对于 C，若 $mn < 0$ ，则 $mx^2 + ny^2 = 1$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$ ，此时曲线 C 表示双曲线，

由 $mx^2 + ny^2 = 0$ 可得 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $m = 0, n > 0$ ，则 $mx^2 + ny^2 = 1$ 可化为 $y^2 = \frac{1}{n}$ ， $y = \pm \frac{\sqrt{n}}{n}$ ，此时曲线 C 表示平行于 x 轴的两条直

线，故 D 正确。故选 ACD。

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了圆锥曲线的定义及其几何性质，考查数学运算、直观想象、逻辑推理等学科素养。解题关键是圆锥曲线定义的应用。

8. 【高考上海卷 10】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，直线 l 经过椭圆右焦点 F ，交椭圆 C 于 P, Q 两点（点 P 在第二象限），若 Q 关于 x 轴对称的点为 Q' ，且满足 $PQ \perp FQ'$ ，则直线 l 的方程为_____。

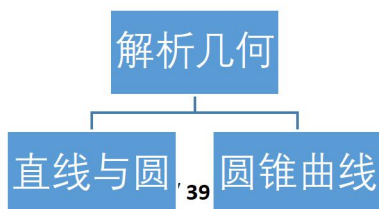
【答案】 $y = -x + 1$

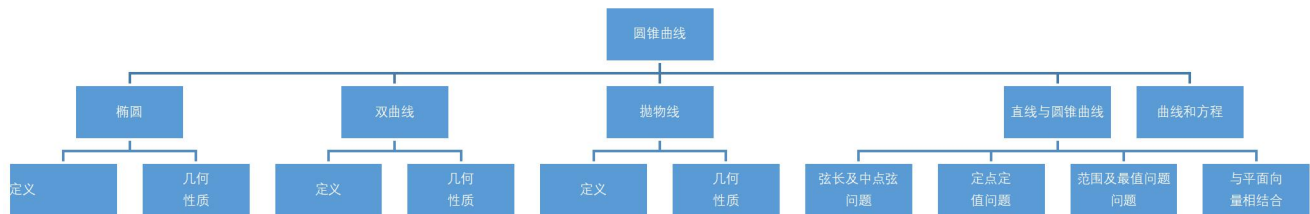
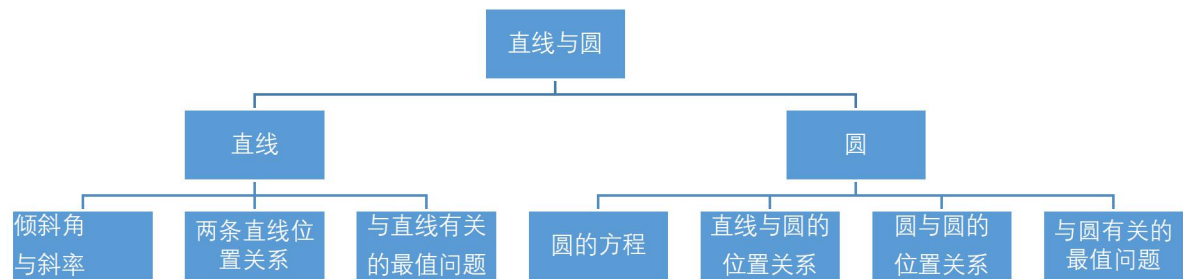
【解析】由条件可知 $\triangle FQQ'$ 是等腰直角三角形，所以直线 l 的倾斜角是 135° ，所以直线 l 的斜率是 $\tan 135^\circ = -1$ ，且过点 $F(1, 0)$ ，得到直线 l 的方程为 $y = -(x - 1)$ ，即 $y = -x + 1$ 。故答案为： $y = -x + 1$ 。

【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了椭圆标准方程及其几何性质，考查直线与椭圆位置关系，考查数学运算、直观想象等学科素养。解题关键是直角三角形的应用。

讲考向

一、考向分析：





二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
直线的 倾斜角	1. 求倾斜角的取值范围的一般步骤：①求出斜率 $k=\tan \alpha$ 的取值范围；②利用正切函数的单调性，借助图象或单位圆数形结合，确定倾斜角 α 的取值范围. 2. 求倾斜角时要注意斜率是否存在. 3. 斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$ 的计算与两点坐标的顺序无关，当 $x_1=x_2, y_1\neq y_2$ 时，直线的倾斜角为 90°.
两条直线 位置关系	1. 当直线方程中存在字母参数时，不仅要考虑到斜率存在的一般情况，也要考虑到斜率不存在的特殊情况. 同时还要注意 $x、y$ 的系数不能同时为零这一隐含条件. 2. 在判断两直线平行、垂直时，也可直接利用直线方程的系数间的关系得出结论. 设直线 l_1 方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 l_2 方程为 $A_2x+B_2y+C_2=0$. 若 $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\begin{cases} A_1B_2=A_2B_1, \\ A_1C_2\neq A_2C_1; \end{cases}$ 若 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$. 3. 求过两直线交点的直线方程的方法：求过两直线交点的直线方程，先解方程组求出两直

	线的交点坐标，再结合其他条件写出直线方程. 4. 利用距离公式应注意：①点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $x=a$ 的距离 $d= x_0-a$，到直线 $y=b$ 的距离 $d= y_0-b$；②应用两平行线间的距离公式要把两直线方程中 x, y 的系数分别化为相等.
与直线有关的最值问题	1. 求解与直线方程有关的最值问题. 先设出直线方程，建立目标函数，再利用基本不等式求解最值. 2. 求参数值或范围. 注意点在直线上，则点的坐标适合直线的方程，再结合函数的单调性或基本不等式求解.
圆的方程	用待定系数法求圆的方程的一般步骤 1. 选用圆的方程两种形式中的一种(若知圆上三个点的坐标，通常选用一般方程；若给出圆心的特殊位置或圆心与两坐标轴间的关系，通常选用标准方程). 2. 根据所给条件，列出关于 D, E, F 或 a, b, r 的方程组. 3. 解方程组，求出 D, E, F 或 a, b, r 的值，并把它们代入所设的方程中，得到所求圆的方程. 求与圆有关的轨迹问题时，根据题设条件的不同，常采用以下方法： 1. 直接法：直接根据题目提供的条件列出方程. 2. 定义法：根据圆、直线等定义列方程. 3. 几何法：利用圆的几何性质列方程. 4. 代入法：找到要求点与已知点的关系，代入已知点满足的关系式等.
与圆有关的最值问题	1. 形如 $\mu = \frac{y-b}{x-a}$ 的最值问题，可转化为过定点的动直线的斜率的最值问题. 2. 形如 $t = ax + by$ 的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题，也可用三角代换求解. 3. 形如 $m = (x-a)^2 + (y-b)^2$ 的最值问题，可转化为动点与定点的距离的平方的最值问题. 4. 与圆相关的最值，若几何意义明显时，可充分利用几何性质，借助几何直观求解. 否则可用代数法转化为函数求最值.
直线与圆的位置关系	1、判断直线与圆的位置关系的常见方法 (1) 几何法：利用 d 与 r 的关系； (2) 代数法：联立方程之后利用 Δ 判断. 2、直线被圆所截得的弦长问题是直线与圆相交时产生的问题，也是直线与圆的位置关系的一个衍生问题. 常用的方法有：①根据平面几何知识结合坐标，把弦长用圆的半径和圆心到直线的距离表示；②通过联立直线与圆的方程，利用根与系数的关系，建立弦长与交点坐标的关系来解决问题.

椭圆定义及其几何性质	1. 椭圆定义的应用主要有两个方面：一是判定平面内动点与两定点的轨迹是否为椭圆；二是利用定义求焦点三角形的周长、面积、弦长、最值和离心率等. 2. 椭圆的定义式必须满足 $2a > F_1F_2$. 3. 求椭圆方程的基本方法是待定系数法，先定形，再定量，即首先确定焦点所在位置，然后根据条件建立关于 a, b 的方程组，如果焦点位置不确定，可设椭圆方程为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$，求出 m, n 的值即可. 4. 在解关于离心率 e 的二次方程时，要注意利用椭圆的离心率 $e \in (0, 1)$ 进行根的取舍，否则将产生增根. 5. 与椭圆有关的最值或取值范围问题的求解方法主要有以下几种： (1) 利用数形结合、几何意义，尤其是椭圆的性质，求最值或取值范围. (2) 利用函数，尤其是二次函数求最值或取值范围. (3) 利用不等式，尤其是基本不等式求最值或取值范围. (4) 利用一元二次方程的判别式求最值或取值范围.
双曲线定义及其几何性质	1. “焦点三角形”中常用到的知识点及技巧 (1) 常用知识点：在“焦点三角形”中，正弦定理、余弦定理、双曲线的定义经常使用. (2) 技巧：经常结合 $PF_1 - PF_2 = 2a$，运用平方的方法，建立它与 $PF_1 \cdot PF_2$ 的联系. 2. 应用双曲线定义需注意的问题 在双曲线的定义中一是不能漏掉“绝对值”，否则轨迹是双曲线的一支；二是“常数”小于 F_1F_2，否则轨迹是线段或不存在. (1) 利用待定系数法求双曲线标准方程的关键是：设出双曲线方程的标准形式，根据已知条件，列出关于参数 a, b, c 的方程并求出 a, b, c 的值；(2) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有相同渐近线时可设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda \neq 0)$. 3. 求双曲线离心率或其取值范围的方法 (1) 求 a, b, c 的值，由 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ 直接求 e. (2) 列出含有 a, b, c 的齐次方程(或不等式)，借助于 $b^2 = c^2 - a^2$ 消去 b，然后转化成关于 e 的方程(或不等式)求解. 4. 与双曲线有关的取值范围问题的解题思路 (1) 若条件中存在不等关系，则借助此关系直接变换转化求解.

	(2)若条件中没有不等关系,要善于发现隐含的不等关系或借助曲线中不等关系来解决.
抛物线定义 及其几何性质	1. 由抛物线定义,把抛物线上点到焦点距离与到准线距离相互转化. 2. 注意灵活运用抛物线上一点 $P(x, y)$ 到焦点 F 的距离 $PF = x +\frac{p}{2}$ 或 $PF = y +\frac{p}{2}$. 3. 求抛物线的标准方程的方法 (1)先定位:根据焦点或准线的位置.(2)再定形:即根据条件求 p. 4. 抛物线性质的应用技巧 (1)利用抛物线方程确定及应用其焦点、准线时,关键是将抛物线方程化成标准方程. (2)要结合图形分析,灵活运用平面图形的性质以形助数. 5、抛物线焦点弦的 4 个常用结论 设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的弦,若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 (1)$x_1x_2=\frac{p^2}{4}, y_1y_2=-p^2$. (2)弦长 $AB =x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$ (α 为弦 AB 的倾斜角). (3)以弦 AB 为直径的圆与准线相切.(4)过焦点垂直于对称轴的弦长等于 $2p$.
直线与圆锥 曲线位置关 系	1. 判断直线与圆锥曲线的交点个数时,可直接求解相应方程组得到交点坐标,也可利用消元后的一元二次方程根的判别式来确定,需注意利用判别式的前提是二次项系数不为 0. 2. 依据直线与圆锥曲线的交点个数求参数时,联立方程并消元,得到一元方程,此时注意观察方程的二次项系数是否为 0,若为 0,则方程为一次方程;若不为 0,则将方程解的个数转化为判别式与 0 的大小关系求解. 3、设直线与椭圆的交点坐标为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $AB =\sqrt{1+k^2}[\ x_1+x_2\ ^2-4x_1x_2]=\sqrt{\left[1+\frac{1}{k^2}\right]}\ [\ y_1+y_2\ ^2-4y_1y_2]$ (k 为直线斜率). 4、最值与范围问题的解题思路 (1)构造关于所求量的函数,通过求函数的值域来获得问题的解. (2)构造关于所求量的不等式,通过解不等式来获得问题的解.在解题过程中,一定要深刻挖掘题目中的隐含条件,如判别式大于零等. 5、遇到弦中点问题常用“根与系数的关系”或“点差法”求解. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中,以 $P(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中,以 $P(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率 $k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 中,以 $P(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率 $k=\frac{p}{y_0}$. 在使用根与系数关系时,要注意前提条件是 $\Delta\geq 0$.

求轨迹方程的基本方法	1、直接法求轨迹方程的 2 种常见类型及解题策略 (1) 题目给出等量关系, 求轨迹方程. 可直接代入即可得出方程. (2) 题中未明确给出等量关系, 求轨迹方程. 可利用已知条件寻找等量关系, 得出方程. 但要注意完备性易忽视. 2. 定义法求轨迹方程的适用条件: 动点与定点、定直线之间的某些关系满足直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线的定义, 定义法求轨迹方程的关键是理解平面几何图形的定义. 3、相关点法求轨迹方程的步骤 (1) 明确主动点(已知曲线上的动点)$P(x_0, y_0)$, 被动点(要求轨迹的动点)$M(x, y)$. (2) 寻求关系式 $x_0=f(x, y)$, $y_0=g(x, y)$. (3) 将 x_0, y_0 代入已知曲线方程. (4) 整理关于 x, y 的关系式得 M 的轨迹方程.
定点、定值、最值问题的求解策略	1、圆锥曲线中的最值问题类型较多, 解法灵活多变, 但总体上主要有两种方法: 一是几何方法, 即通过利用圆锥曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等进行求解; 二是代数方法, 即把要求最值的几何量或代数表达式表示为某个(些)变量的函数(解析式), 然后利用函数方法、不等式方法等进行求解. 2、圆锥曲线中的证明问题常见的有: 位置关系方面的, 如证明相切、垂直、过定点等; 数量关系方面的, 如存在定值、恒成立等. 在熟悉圆锥曲线的定义和性质的前提下, 要多采用直接证明法, 但有时也会用到反证法. 3、求解直线或圆锥曲线过定点问题的基本思路是: 把直线或圆锥曲线方程中的变量 x, y 看成常数, 把方程的一端化为零, 将方程转化为以参数为主变量的方程, 这个方程对任意参数都成立, 这时参数的系数就要全部等于零, 这样就得到一个关于 x, y 的方程组, 这个方程组的解所确定的点就是直线或圆锥曲线所过的定点. 4、求定值问题常用的方法有两种 (1) 从特殊值入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关. (2) 直接计算、推理, 并在计算、推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

考查直线的倾斜角及斜率

【例 1】一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为

A. $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】 $(-2, -3)$ 关于 y 轴对称点的坐标为 $(2, -3)$ ，设反射光线所在直线为 $y + 3 = k(x - 2)$ ，即 $kx - y - 2k - 3 = 0$ ，

则 $d = \frac{|-3k - 2 - 2k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ ， $|5k + 5| = \sqrt{k^2 + 1}$ ，解得 $k = -\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$ 。

【例 2】(2021·江西五市九校联考) 设 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， O 为坐标原点，点 P 满足 $|PA|^2 + |PB|^2 \leq 16$ ，若直线 $kx - y + 6 = 0$ 上存在点 Q 使得 $\angle PQO = \frac{\pi}{6}$ ，则实数 k 的取值范围为 ()

A. $[-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$ B. $(-\infty, -4\sqrt{2}] \cup [4\sqrt{2}, +\infty)$
C. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

【答案】C

【解析】设 $P(x, y)$ ，则 $|PA|^2 + |PB|^2 = (x + 2)^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2 \leq 16$ ，整理可得 $x^2 + y^2 \leq 4$ ，故 $|OP| \leq 2$ ，

在 $\triangle PQO$ 中， $\frac{|OQ|}{\sin \angle QPO} = \frac{|OP|}{\sin \angle PQO}$ ，则 $|OQ| = \frac{|OP| \sin \angle QPO}{\sin \angle PQO} = 2|OP| \sin \angle QPO \leq 2 \times 2 \times 1 = 4$ ，

设原点到直线的距离为 d ，则需满足 $d \leq 4$ ， $\therefore d = \frac{6}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 4$ ，解得 $k \leq -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $k \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。故选 C。

【点睛】本题考查直线中参数范围的求解，解题的关键是得出 $|OQ| = 2|OP| \sin \angle QPO \leq 4$ ，利用原点到直线的距离小于等于 4 求解。

考查两条直线的位置关系：

【例 1】(2020·陕西汉中一模(理)) 已知直线 $l_1: ax + (a + 2)y + 1 = 0$ ， $l_2: x + ay + 2 = 0 (a \in R)$ ，则“ $e^a = \frac{1}{e}$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $\because$ 直线 $l_1: ax + (a + 2)y + 1 = 0$ ， $l_2: x + ay + 2 = 0$ ，

当“ $a = -2$ ”时, 直线 $l_1: -2x + 1 = 0, l_2: x - 2y + 2 = 0$, 不满足 $l_1 // l_2$,

当“ $a = 0$ ”时, 直线 $l_1: 2y + 1 = 0, l_2: x + 2 = 0$, 不满足 $l_1 // l_2$,

$\therefore$ 当 $l_1 // l_2$ 时, 则 $\frac{a}{1} = \frac{a+2}{a} \neq \frac{1}{2}$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 2$. 而由 $e^a = \frac{1}{e}$, 解得 $a = -1$,

所以由“ $e^a = \frac{1}{e}$ ”能推出“ $l_1 // l_2$ ”, 由“ $l_1 // l_2$ ”不能推出“ $e^a = \frac{1}{e}$ ”, 所以“ $e^a = \frac{1}{e}$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”充分不必要条件. 故选 A.

【例 2】已知直线 l 过圆 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 的圆心, 且与直线 $x + y + 1 = 0$ 垂直, 则 l 的方程是 ()

- A. $x + y - 2 = 0$ B. $x - y + 2 = 0$ C. $x + y - 3 = 0$ D. $x - y + 3 = 0$

【答案】D

【解析】直线 l 过点 $(0, 3)$, 斜率为 1, 所以直线 l 的方程为 $x - y + 3 = 0$.

考查与直线有关的最值:

【例 1】(2021·四川成都二模(理)) 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 且椭圆与直线 $l: x + y = 7$ 有公共点, 则椭圆长轴长的最小值为 ()

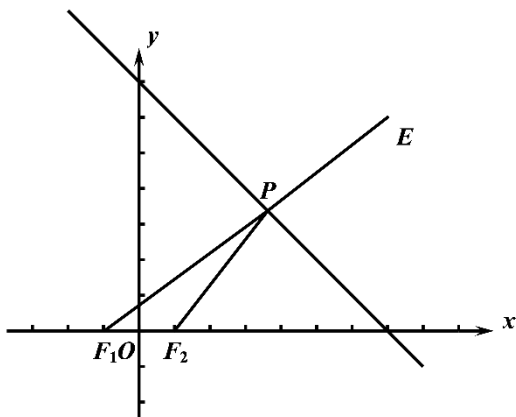
- A. 10 B. 7 C. $2\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】设椭圆 C 与直线 l 的一个公共点为 P , 则 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ (即为长轴长), 问题转化为在直线 l 上找

点 P , 使得 $|PF_1| + |PF_2|$ 最小, 设 F_2 关于 l 的对称点 $E(x, y)$, 则 $\begin{cases} \frac{y}{x-1} = 1 \\ \frac{x+1}{2} + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$, 可得 E 点坐标为 $(7, 6)$,

则 $|PF_1| + |PF_2| = |PF_1| + |PE| \geq |F_1E| = \sqrt{(7+1)^2 + 6^2} = 10$, 当且仅当 F_1, P, E 三点共线时等号成立即椭圆长轴长 $2a$ 的最小值为 10. 故选 A.



【例 2】在平面直角坐标系中, 记 d 为点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 到直线 $x - my - 2 = 0$ 的距离, 当 θ, m 变化时, d 的最大值为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】由题意可得 $d = \frac{|\cos \theta - m \sin \theta - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m \sin \theta - \cos \theta + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$$\frac{|\sqrt{m^2+1}(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\cos\theta) + 2|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|\sqrt{m^2+1}\sin(\theta-\varphi) + 2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

(其中 $\cos \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$), $\because -1 \leq \sin(\theta - \varphi) \leq 1$,

$$\therefore \frac{|2 - \sqrt{m^2 + 1}|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq d \leq \frac{2 + \sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad \frac{2 + \sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$\therefore$ 当 $m=0$ 时, d 取得最大值 3, 故选 C.

考查圆的方程:

【例 1】(2021·陕西咸阳一模(理)) 已知 $\odot M$ 经过坐标原点, 半径 $r = \sqrt{2}$, 且与直线 $y = x + 2$ 相切, 则 $\odot M$ 的方程为 ().

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 或 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 或 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$
- C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 或 $(x+\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$ D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 或 $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$

【答案】 A

【解析】设圆心坐标为 (a, b) ，半径 $r = \sqrt{2}$ ，因为圆 M 过坐标原点，且与直线 $y = x + 2$ 相切，

所以 $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，所以 $a=b=\pm 1$ ，即圆心为 $(1,1)$ 或 $(-1,-1)$ ，

圆 M 的方程为： $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ ，故选 A.

【点睛】处理直线与圆的位置关系时，若两方程已知或圆心到直线的距离易表达，则用几何法；若方程中含有参数，或圆心到直线的距离的表达较繁琐，则用代数法.

【例 2】若圆心在 x 轴上、半径为 $\sqrt{5}$ 的圆 O 位于 y 轴左侧，且与直线 $x+2y=0$ 相切，则圆 O 的方程是

- A. $(x-\sqrt{5})^2+y^2=5$ B. $(x+\sqrt{5})^2+y^2=5$
C. $(x-5)^2+y^2=5$ D. $(x+5)^2+y^2=5$

【答案】D

【解析】设圆心 $O(a,0)(a<0)$ ，则 $\sqrt{5} = \frac{|a|}{\sqrt{1^2+2^2}}$ ，即 $|a|=5$ ，解得 $a=-5$ ，所以圆 O 的方程为

$$(x+5)^2+y^2=5.$$

考查圆与圆的位置关系：

【例 1】若圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切，则 $m=$

- A. 21 B. 19 C. 9 D. -11

【答案】C

【解析】由题意得 $C_1(0,0), C_2(3,4)$ ， $r_1=1, r_2=\sqrt{25-m}$ ， $|C_1C_2|=r_1+r_2=1+\sqrt{25-m}=5$ ，所以 $m=9$.

【例 2】(2021·陕西宝鸡一模(理)) 过点 $P(x,y)$ 作圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 的切线，切点分别为 A, B ，若 $|PA|=|PB|$ ，则 x^2+y^2 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 8

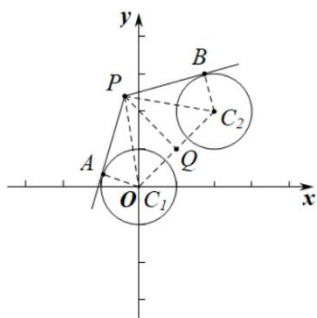
【答案】B

【解析】如图所示，由圆的切线的性质得 $C_1A \perp PA, C_2B \perp PB$ ，在 $Rt\triangle PAC_1, Rt\triangle PBC_2$ 中有 $|PA|^2 = |PC_1|^2 - 1, |PB|^2 = |PC_2|^2 - 1$ ，由题知 $|PA|=|PB|$ ， $\therefore |PC_1|=|PC_2|$ ，所以点 P 在线段 C_1C_2 的垂直平分线上，由题知 $C_1(0,0), C_2(2,2)$ ，所以 C_1 与 C_2 的中点 Q 的坐标为 $(1,1)$ ，

C_1 与 C_2 所在直线的斜率为 $k_1 = \frac{2-0}{2-0} = 1$, $\therefore P, Q$ 所在直线 l_1 的斜率为 $k_2 = \frac{-1}{k_1} = -1$,

$\therefore$ 直线 l_1 的方程为 $y = -1 \times (x-1) + 1$, 即 $y = -x + 2$, 点 $P(x, y)$ 在 $y = -x + 2$, 所以点 P 的坐标满足

$y = -x + 2$, 所以 $x^2 + y^2 = x^2 + (-x + 2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2$,



故选 B.

【点睛】本题主要考查直线与圆相切的性质及函数的最值；解题方法是根据已知条件，将 $x^2 + y^2$ 表示为只含有一个未知数 x 的函数，然后根据二次函数的特征求出其最小值；解题的关键点是找出点 P 所在的一条直线，进而用一个未知数 x 表示出其坐标，进而求得 $x^2 + y^2$ 的最小值。

考查直线与圆的位置关系：

【例 1】已知点 $M(a, b)$ 在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 外，则直线 $ax + by = 1$ 与圆 O 的位置关系是

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 不确定

【答案】B

【解析】点 $M(a, b)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外， $\therefore a^2 + b^2 > 1$. 圆 $O(0,0)$ 到直线 $ax + by = 1$ 距离 $d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1 =$

圆的半径，故直线与圆相交. 所以选 B.

【例 2】(2020·江西新余市·新余一中高三其他模拟(文)) 垂直于直线 $y = x - 2$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切于第三象限的直线方程是 ()

- A. $x + y - 1 = 0$ B. $x + y + \sqrt{2} = 0$
C. $x + y - \sqrt{2} = 0$ D. $x + y + 1 = 0$

【答案】B

【解析】设所求方程为 $y = -x + m (m < 0)$ ，圆心到直线的距离为 $r = \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 1$ ，

$\because m < 0, \therefore m = -\sqrt{2}$. 故选 B.

【例 3】若曲线 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 与曲线 $C_2: y(y - mx - m) = 0$ 有四个不同的交点，则实数 m 的取值范围是

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

D. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

【答案】B

【解析】 $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$ ， C_2 表示两条直线即 x 轴和直线 $l: y = m(x+1)$ ，显然 x 轴与 C_1 有两个交点，

由题意 l 与 C_2 相交，所以 C_1 的圆心到 l 的距离 $d = \frac{|m(1+1)-0|}{\sqrt{m^2+1}} < r = 1$ ，解得 $m \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ，又当

$m = 0$ 时，直线 l 与 x 轴重合，此时只有两个交点，不符合题意. 故选 B.

考查与圆有关的最值问题：

【例 1】已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 和两点 $A(-m, 0)$ ， $B(m, 0) (m > 0)$ ，若圆 C 上存在点 P ，使得

$\angle APB = 90^\circ$ ，则 m 的最大值为

A. 7

B. 6

C. 5

D. 4

【答案】B

【解析】因为圆 C 的圆心为 $(3, 4)$ ，半径为 1， $|OC| = 5$ ，所以以原点为圆心、以 m 为半径与圆 C 有公共点的最大圆的半径为 6，所以 m 的最大值为 6，故选 B.

【例 2】(2021·安徽六安一模(理)) 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ ，过直线 $l: 2x + y = 4$ 在第一象限内一动点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别是 A, B ，直线 AB 与两坐标轴分别交于 M, N 两点，则 $\triangle OMN$ 面积的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

【答案】B

【解析】设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $2x_0 + y_0 = 4 (x_0 > 0, y_0 > 0)$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

当 $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ 时, $k_{OA} \cdot k_{PA} = -1 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot k_{PA} = -1 \Rightarrow k_{PA} = -\frac{x_1}{y_1}$, 所以切线 PA 方程为:

$y - y_1 = (-\frac{x_1}{y_1})(x - x_1)$, 而 $x_1^2 + y_1^2 = 2$, 化简为: $x_1x + y_1y = 2$, 显然当 $x_1 = 0$ 或 $y_1 = 0$ 时也适合, 所以切线

PA 方程为 $x_1x + y_1y = 2$, 同理 $PB: x_2x + y_2y = 2$, 将 P 的坐标代入上述直线方程, 则有 $\begin{cases} x_1x_0 + y_1y_0 = 2 \\ x_2x_0 + y_2y_0 = 2 \end{cases}$,

于是直线 AB 的方程为 $x_0x + y_0y = 2$, 因此 $M(\frac{2}{x_0}, 0), N(0, \frac{2}{y_0})$,

$\triangle OMN$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x_0} \cdot \frac{2}{y_0} = \frac{4}{2x_0 \cdot y_0} \geq \frac{4}{(\frac{2x_0 + y_0}{2})^2} = \frac{4}{(\frac{4}{2})^2} = 1$,

当且仅当 $2x_0 = y_0$, 即 $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$ 时取等号. 所以 $\triangle OMN$ 面积的最小值为 1. 故选 B.

考查圆锥曲线的方程:

【例 1】设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点,

若 $|AF_1| = 3|BF_1|, AF_2 \perp x$ 轴, 则椭圆 E 的方程为_____.

【答案】 $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$

【解析】由题意得通径 $AF_2 = b^2$, $\therefore$ 点 B 坐标为 $B(-\frac{5c}{3}, -\frac{1}{3}b^2)$, 将点 B 坐标代入椭圆方程得

$$(-\frac{5c}{3})^2 + \frac{(-\frac{1}{3}b^2)^2}{b^2} = 1, \text{ 又 } b^2 = 1 - c^2, \text{ 解得 } \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3} \\ c^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \therefore \text{椭圆方程为 } x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1.$$

【例 2】已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A ,

B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ B. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

【答案】C

【解析】由 $d_1 + d_2 = 6$ 得双曲线的右焦点到渐近线的距离为 3, 所以 $b = 3$. 因为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 所以 $\frac{c}{a} = 2$, 所以 $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 4$, 所以 $\frac{a^2 + 9}{a^2} = 4$, 解得 $a^2 = 3$, 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$.

【例 3】已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2. 若抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 2, 则抛物线 C_2 的方程为

- A. $x^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}y$ B. $x^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}y$ C. $x^2 = 8y$ D. $x^2 = 16y$

【答案】D

【解析】因为双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 所以 $\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow b = \sqrt{3}a$. 又渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$, 所以双曲线 C_1 的渐近线, 方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$. 而抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点坐标为 $(0, \frac{p}{2})$,

所以有 $\frac{|\frac{p}{2}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = 2 \Rightarrow p = 8$. 故选 D.

考查椭圆、双曲线离心率:

【例 1】(2021·云南曲靖一模(理)) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与函数 $y = \sqrt{x} (x \neq 0)$ 的图象交于点 P , 若函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象在点 P 处的切线过双曲线左焦点 $F(-4, 0)$, 则双曲线的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{17}+4}{4}$ B. $\frac{\sqrt{17}+3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{17}+2}{4}$ D. $\frac{\sqrt{17}+1}{4}$

【答案】D

【解析】设 P 的坐标为 $(m, \sqrt{m})$, 由左焦点 $F(-4, 0)$, 所以 $k_{PF} = \frac{\sqrt{m}-0}{m+4}$, 函数的导数 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

则在 P 处的切线斜率 $k = f'(m) = \frac{1}{2\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}}{m+4}$, 即 $m+4 = 2m$, 得 $m = 4$, 则 $P(4, 2)$,

设右焦点为 $A(4, 0)$, 则 $2a = |PF| - |PA| = \sqrt{64+4} - \sqrt{0+4} = 2(\sqrt{17}-1)$, 即 $a = \sqrt{17}-1$,

$\because c = 4$, $\therefore$ 双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$. 故选 D.

【例 2】(2021·安徽淮南一模(文)) 已知 $\triangle ABC$ 是有一内角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直角三角形, 若圆锥曲线 Ω 以 A 、 B 为焦点, 并经过点 C , 则圆锥曲线 Ω 的离心率不可能是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}+1$

【答案】B

【解析】由题意可知, $\triangle ABC$ 的三个内角大小分别为 $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{2}$, 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2 、 $2\sqrt{3}$ 、 4 .

① 当 $C = \frac{\pi}{6}$ 时, 若圆锥曲线 Ω 为椭圆, 则 $2c = 2$, $2a = 4 + 2\sqrt{3}$, 曲线 Ω 的离心率为

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{2}{4 + 2\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3};$$

若圆锥曲线 Ω 为双曲线, 则 $2c = 2$, $2a = 4 - 2\sqrt{3}$, 曲线 Ω 的离心率为 $e = \frac{2}{4 - 2\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$;

② 当 $C = \frac{\pi}{3}$ 时, 若圆锥曲线 Ω 为椭圆, 则 $2c = 2\sqrt{3}$, $2a = 4 + 2 = 6$, 曲线 Ω 的离心率为 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

若圆锥曲线 Ω 为双曲线, 则 $2c = 2\sqrt{3}$, $2a = 4 - 2 = 2$, 曲线 Ω 的离心率为 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

③ 当 $C = \frac{\pi}{2}$ 时, 若圆锥曲线 Ω 为椭圆, 则 $2c = 4$, $2a = 2\sqrt{3} + 2$, 曲线 Ω 的离心率为

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{4}{2\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3} - 1;$$

若圆锥曲线 Ω 为双曲线, 则 $2c = 4$, $2a = 2\sqrt{3} - 2$, 曲线 Ω 的离心率为 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{4}{2\sqrt{3} - 2} = \sqrt{3} + 1$.

故选 B.

【点睛】方法点睛: 求解椭圆或双曲线的离心率的方法如下:

- (1) 定义法: 通过已知条件列出方程组, 求得 a 、 c 的值, 根据离心率的定义求解离心率 e 的值;
- (2) 齐次式法: 由已知条件得出关于 a 、 c 的齐次方程, 然后转化为关于 e 的方程求解;
- (3) 特殊值法: 通过取特殊位置或特殊值, 求得离心率.

考查焦点弦问题:

【例 1】(2021·四川凉山彝族自治州·高三一模(理)) 直线 $y = x + 2$ 和双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的渐近线相交于 A ,

B 两点, 则线段 AB 的长度为 ()

- A. $2\sqrt{6}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

设 $y = x + 2$ 与 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 相交于 A 点, 与 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 相较于 B 点,

$$\text{由} \begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \text{解得 } A(-3 - \sqrt{3}, -\sqrt{3} - 1), \text{ 由} \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \text{解得 } B(\sqrt{3} - 3, \sqrt{3} - 1),$$

所以 $|AB| = \sqrt{(-3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3)^2 + (-\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 故选 A.

【点睛】方法点睛: 该题考查的是有关两点间距离问题, 解题方法如下:

(1) 先根据双曲线的渐近线方程求得 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的渐近线;

(2) 联立方程组, 分别求得对应的交点坐标;

(3) 利用两点间距离公式求得结果.

【例 2】椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2c$. 若直线 $y = \sqrt{3}(x + c)$ 与椭圆

Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2 = 2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于_____

【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】由题意可知, $\triangle MF_1F_2$ 中, $\angle MF_1F_2 = 60^\circ, \angle MF_2F_1 = 30^\circ, \angle F_1MF_2 = 90^\circ$,

$$\text{所以有} \begin{cases} MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 = (2c)^2 \\ MF_1 + MF_2 = 2a \\ MF_2 = \sqrt{3}MF_1 \end{cases}, \text{整理得 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1, \text{ 故答案为 } \sqrt{3} - 1.$$

考查中点弦问题:

【例 1】(2021·陕西咸阳一模(理)) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上存在两点 A, B 关于直线 $y = x - 6$

对称, 且线段 AB 的中点坐标为 $M(2, -4)$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】 B

【解析】 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且线段 AB 的中点坐标为 $M(2, -4)$, 则 $x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = -8$,又 A, B 关于直线 $y = x - 6$ 对称, 所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \times 1 = -1$, 且 A, B 在双曲线上, $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$,相减可得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$, 即 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$, 故 $\frac{4}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 0$, 即 $\frac{b^2}{a^2} = 2$,离心率为 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$, 故选 B.

【点睛】 双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质, 求双曲线的离心率(或离心率的取值范围), 常见有两种

方法: ①求出 a, c , 代入公式 $e = \frac{c}{a}$;②只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式, 结合 $b^2 = c^2 - a^2$ 转化为 a, c 的齐次式, 然后等式(不等式)两边分别除以 a 或 a^2 转化为关于 e 的方程(不等式), 解方程(不等式)即可得 e (e 的取值范围).【例 2】(2021·山东菏泽市·高三期末) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离是 2, 过点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点, O 为坐标原点, 则下列结论正确的是 ()A. C 的准线方程为 $x = -1$ B. 线段 AB 的长度的最小值为 4C. M 的坐标可能是 $(4, 2)$ D. 存在直线 l , 使得 OA 与 OB 垂直

【答案】 AB

【解析】 由题意 $p = 2$, 所以准线方程为 $x = -1$, A 正确; 焦点为 $F(1, 0)$,当直线 l 斜率不存在时, 方程为 $x = 1$, 则 $A(1, 2), B(1, -2)$, 此时 $|AB| = 4$, AB 中点为 $F(1, 0)$, $k_{OA}k_{OB} = -4$, OA 与 OB 不垂直.当直线 l 斜率存在时, 设方程为 $y = k(x - 1)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,由 $\begin{cases} y = k(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2 - 2(k^2 + 2)x + k^2 = 0$, $x_1 + x_2 = \frac{2(k^2 + 2)}{k^2}$, $x_1x_2 = 1$, $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = \frac{2(k^2 + 2)}{k^2} + 2 = 4 + \frac{4}{k^2} > 4$, 所以 $|AB|$ 的最小值为 4, B 正确;

若 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{k^2+2}{k^2} = 4$, 则 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$, 此时 $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{k(x_1-1)+k(x_2-1)}{2} = \frac{k}{2}(x_1+x_2-2) = \frac{2}{k} \neq 2$, 因此 AB

中点不可能是 $(4, 2)$, C 错;

$y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$, 即 $(y_1 y_2)^2 = 16x_1 x_2 = 16$, $y_1 y_2 = -4$ (显然 A, B 在 x 轴两侧),

则 $k_{OA} k_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -4$, OA 与 OB 不垂直. D 错. 故选 AB .

【名师点睛】关键点点睛: 本题考查抛物线的焦点弦的性质, 掌握焦点弦性质是解题关键.

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点为 F , 过 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

(1) $|AB| = x_1 + x_2 + p$, 当 AB 是 x 轴垂直时, $|AB|_{\min} = 2p$, 此时 AB 称为抛物线的通径;

(2) $y_1 y_2 = -p^2$, $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$;

(3) 若直线 AB 的倾斜角为 θ , 则 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$;

(4) 以 AB 为直径的圆与准线相切;

(5) 焦点到 A, B 两点在准线上的投影的张角为 90° ;

(6) $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p}$.

【例 3】设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 4)$, 离心率为 $\frac{3}{5}$

(I) 求 C 的方程; (II) 求过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的中点坐标.

【解析】(I) 将 $(0, 4)$ 代入 C 的方程得 $\frac{16}{b^2} = 1$, $\therefore b = 4$, 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ 得 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$

即 $1 - \frac{16}{a^2} = \frac{9}{25}$, $\therefore a = 5$, $\therefore C$ 的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(II) 过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线方程为 $y = \frac{4}{5}(x - 3)$, 设直线与 C 的交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

将直线方程 $y = \frac{4}{5}(x - 3)$ 代入 C 的方程, 得 $\frac{x^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{25} = 1$, 即 $x^2 - 3x - 8 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{3 - \sqrt{41}}{2}$,

$$x_2 = \frac{3+\sqrt{41}}{2}, \therefore AB \text{ 的中点坐标 } \bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2}{5}(x_1+x_2-6) = -\frac{6}{5}, \text{ 即中点为 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{6}{5}\right).$$

考查定值、定点问题:

【例 1】(2021·宁夏吴忠一模(理)) 若双曲线 $x^2 - y^2 = 9$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 共顶点, 且它们的离心率之积为 $\frac{4}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若椭圆 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 直线 l 与椭圆 C 交于 P、Q 两点, 设直线 A_1P 与 A_2Q 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 - \frac{1}{5}k_2 = 0$. 试问, 直线 l 是否过定点? 若是, 求出定点的坐标; 若不是, 请说明理由.

【解析】(1) 由已知得双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$, 又两曲线离心率之积为 $\frac{4}{3}$, 所以椭圆的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

由题意知 $a = 3$, 所以 $c = 2\sqrt{2}$, $b = 1$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(2) 当直线 l 的斜率为零时, 由对称性可知: $k_1 = -k_2 \neq 0$, 不满足 $k_1 - \frac{1}{5}k_2 = 0$,

故直线 l 的斜率不为零. 设直线 l 的方程为 $x = ty + n$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty + n \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得: } (t^2 + 9)y^2 + 2tny + n^2 - 9 = 0,$$

因为直线 l 与椭圆 C 交于 P、Q 两点, 所以 $\Delta = 4t^2n^2 - 4(t^2 + 9)(n^2 - 9) > 0$, 整理得: $t^2 - n^2 + 9 > 0$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2tn}{t^2 + 9}$, $y_1y_2 = \frac{n^2 - 9}{t^2 + 9}$, $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 3}$, $k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 3}$.

因为 $k_1 - \frac{1}{5}k_2 = 0$, 所以 $\frac{1}{5} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 + 3}}{\frac{y_2}{x_2 - 3}} = \frac{y_1(x_2 - 3)}{y_2(x_1 + 3)} = \frac{y_1(ty_2 + n - 3)}{y_2(ty_1 + n + 3)}$,

整理得: $4ty_1y_2 + 5(n - 3)y_1 - (n + 3)y_2 = 0$, $4ty_1y_2 + 5(n - 3)(y_1 + y_2) = (6n - 12)y_2$,

将 $y_1 + y_2 = -\frac{2tn}{t^2+9}$, $y_1 y_2 = \frac{n^2-9}{t^2+9}$ 代入整理得: $t(n-2)(n-3) = (2-n)(t^2+9)y_2$,

要使上式恒成立, 只需 $n=2$, 此时满足 $t^2-n^2+9>0$, 因此, 直线 l 恒过定点 $(2,0)$.

【点睛】(1) 待定系数法可以求二次曲线的标准方程;

(2) "设而不求"是一种在解析几何中常见的解题方法, 可以解决直线与二次曲线相交的问题;

(3) 证明直线过定点, 通常有两类: ①直线方程整理为斜截式 $y=kx+b$, 过定点 $(0, b)$;

②直线方程整理为点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$, 过定点 (x_0, y_0) .

【例 2】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, ΔOAB 的面积为 1.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N .

求证: $|AN| \cdot |BM|$ 为定值.

【解析】(I) 由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{2}ab=1, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $a=2, b=1$. 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 由 (I) 知, $A(2,0), B(0,1)$, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$.

当 $x_0 \neq 0$ 时, 直线 PA 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令 $x=0$, 得 $y_M = -\frac{2y_0}{x_0-2}$. 从而 $|BM| = |1-y_M| = \left|1 + \frac{2y_0}{x_0-2}\right|$.

直线 PB 的方程为 $y = \frac{y_0-1}{x_0}x+1$. 令 $y=0$, 得 $x_N = -\frac{x_0}{y_0-1}$. 从而 $|AN| = |2-x_N| = \left|2 + \frac{x_0}{y_0-1}\right|$.

所以 $|AN| \cdot |BM| = \left|2 + \frac{x_0}{y_0-1}\right| \cdot \left|1 + \frac{2y_0}{x_0-2}\right| = \left|\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right| = \left|\frac{4x_0y_0-4x_0-8y_0+8}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right| = 4$.

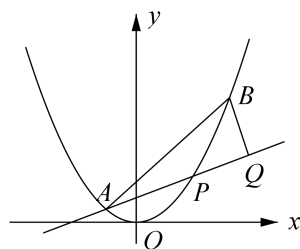
当 $x_0=0$ 时, $y_0=-1$, $|BM|=2, |AN|=2$, 所以 $|AN| \cdot |BM|=4$.

综上, $|AN| \cdot |BM|$ 为定值.

考查最值范围问题：

【例 1】如图，已知抛物线 $x^2 = y$ ，点 $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ， $B(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ ，抛物线上的

$P(x, y)$ ($-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$)，过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q 。



(I) 求直线 AP 斜率的取值范围；

(II) 求 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值。

【解析】(I) 设直线 AP 的斜率为 k ， $k = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}$ ，因为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ，所以直线 AP 斜率的取值范围

是 $(-1, 1)$ 。

(II) 联立直线 AP 与 BQ 的方程 $\begin{cases} kx - y + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} = 0, \\ x + ky - \frac{9}{4}k - \frac{3}{2} = 0, \end{cases}$ ，解得点 Q 的横坐标是 $x_Q = \frac{-k^2 + 4k + 3}{2(k^2 + 1)}$

因为 $|PA| = \sqrt{1+k^2}(x + \frac{1}{2}) = \sqrt{1+k^2}(k+1)$ ， $|PQ| = \sqrt{1+k^2}(x_Q - x) = -\frac{(k-1)(k+1)^2}{\sqrt{k^2+1}}$ ，

所以 $|PA| \cdot |PQ| = -(k-1)(k+1)^3$ ，令 $f(k) = -(k-1)(k+1)^3$ ，因为 $f'(k) = -(4k-2)(k+1)^2$ ，

所以 $f(k)$ 在区间 $(-1, \frac{1}{2})$ 上单调递增， $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减，因此当 $k = \frac{1}{2}$ 时， $|PA| \cdot |PQ|$ 取得最大值 $\frac{27}{16}$ 。

【例 2】(2021·安徽淮南一模(文))椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，

过 F_2 的直线 l 交 C 于点 A 、 B ，且 $\triangle F_1AB$ 的周长为 8。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 点 O 为坐标原点，求 $\triangle AOB$ 面积 S 的取值范围。

【解析】(1) 因为 $\triangle F_1AB$ 的周长为 8，由椭圆的定义知 $4a = 8$ ，故 $a = 2$ ，又 $e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$ ，

所以 $c = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3$ ，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 由题意可设直线 l 的方程为 $x = my + 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0, \text{显然 } \Delta > 0 \text{ 且 } y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4},$$

$$\therefore S = S_{\triangle OF_2 A} + S_{\triangle OF_2 B} = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-6m}{3m^2 + 4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2 + 4}} = \frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}$$

$$\text{令 } \sqrt{m^2 + 1} = t (t \geq 1), \therefore S = \frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{6t}{3t^2 + 1} = \frac{6}{3t + \frac{1}{t}} (t \geq 1).$$

易知 S 在 $t \in [1, +\infty)$ 单调递减, 从而 $S \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$.

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时, 要注意:

(1) 注意观察应用题设中的每一个条件, 明确确定直线、椭圆的条件;

(2) 强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力, 重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

考查证明、探索问题:

【例 1】(2021·海南高三二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_2 作直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点 (l 与 x 轴不重合), $\triangle F_1 MN$, $\triangle F_1 F_2 M$ 的周长分别为 12 和 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 在 x 轴上是否存在一点 T , 使得直线 TM 与 TN 的斜率之积为定值? 若存在, 请求出所有满足条件的点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解析】(1) 设椭圆 C 的焦距为 $2c (c > 0)$, 由题意可得 $\begin{cases} 4a = 12 \\ 2a + 2c = 8 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$, 所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{2}$, 因此椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(2) 因为直线 l 过点 $F_2(1, 0)$ 且不与 x 轴重合, 所以设 l 的方程为 $x = my + 1$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases}, \text{消去 } x \text{ 并整理得 } (8m^2 + 9)y^2 + 16my - 64 = 0,$$

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{16m}{8m^2 + 9} \\ y_1 y_2 = -\frac{64}{8m^2 + 9} \end{cases},$$

所以 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{18}{8m^2 + 9}$, $x_1 x_2 = (my_1 + 1)(my_2 + 1) = m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1 = \frac{-72m^2 + 9}{8m^2 + 9}$.

设 $T(t, 0)$, 则直线 TM 与 TN 的斜率分别为 $k_{TM} = \frac{y_1}{x_1 - t}$, $k_{TN} = \frac{y_2}{x_2 - t}$,

则 $k_{TM} \cdot k_{TN} = \frac{y_1 y_2}{(x_1 - t)(x_2 - t)} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2} = \frac{-\frac{64}{8m^2 + 9}}{\frac{-72m^2 + 9}{8m^2 + 9} - t \cdot \frac{18}{8m^2 + 9} + t^2}$

$$= \frac{-64}{(8t^2 - 72)m^2 + 9 - 18t + 9t^2}.$$

所以当 $8t^2 - 72 = 0$, 即

当 $t = -3$ 时, $\forall m \in \mathbf{R}$, $k_{TM} \cdot k_{TN} = -\frac{4}{9}$; 当 $t = 3$ 时, $\forall m \in \mathbf{R}$, $k_{TM} \cdot k_{TN} = -\frac{16}{9}$.

因此, 所有满足条件的 T 的坐标为 $(-3, 0)$ 和 $(3, 0)$.

【点睛】思路点睛: 定点问题解决步骤:

- (1) 设直线代入二次曲线方程, 整理成一元二次方程;
- (2) 韦达定理列出两根和及两根积;
- (3) 写出定点满足的关系, 整体代入两根和及两根积;
- (4) 整理 (3) 所得表达式探求其恒成立的条件.

【例 2】在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $y = kx + a$ ($a > 0$) 交于 M, N 两点,

(I) 当 $k = 0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(II) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由.

【解析】(I) 由题设可得 $M(2\sqrt{a}, a)$, $N(-2\sqrt{2}, a)$, 或 $M(-2\sqrt{2}, a)$, $N(2\sqrt{a}, a)$. $\because y' = \frac{1}{2}x$, 故 $y = \frac{x^2}{4}$

在 $x = 2\sqrt{2}a$ 处的导数值为 $\sqrt{a}$, C 在 $(2\sqrt{2}a, a)$ 处的切线方程为 $y - a = \sqrt{a}(x - 2\sqrt{a})$, 即 $\sqrt{a}x - y - a = 0$. 故

$y = \frac{x^2}{4}$ 在 $x = -2\sqrt{2}a$ 处的导数值为 $-\sqrt{a}$ ， C 在 $(-2\sqrt{2}a, a)$ 处的切线方程为 $y - a = -\sqrt{a}(x + 2\sqrt{2}a)$ ，即

$\sqrt{a}x + y + a = 0$ 。故所求切线方程为 $\sqrt{a}x - y - a = 0$ 或 $\sqrt{a}x + y + a = 0$ 。

(II) 存在符合题意的点，证明如下：设 $P(0, b)$ 为符合题意的点， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，直线 PM ， PN 的斜率分别为 k_1, k_2 。将 $y = kx + a$ 代入 C 的方程整理得 $x^2 - 4kx - 4a = 0$ 。∴ $x_1 + x_2 = 4k, x_1x_2 = -4a$ 。∴

$$k_1 + k_2 = \frac{y_1 - b}{x_1} + \frac{y_2 - b}{x_2} = \frac{2kx_1x_2 + (a - b)(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{k(a + b)}{a}。当 b = -a 时，有 k_1 + k_2 = 0，则直线 PM 的倾$$

斜角与直线 PN 的倾斜角互补，故 $\angle OPM = \angle OPN$ ，所以 $P(0, -a)$ 符合题意。

考查轨迹方程问题

【例 1】(2021·安徽马鞍山一模(文)) 已知点 A 在圆 $C: (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 16$ 上， $B(-\sqrt{2}, 0)$ ， $P(0, \sqrt{2})$ ，线段 AB 的垂直平分线与 AC 相交于点 D 。

(1) 求动点 D 的轨迹方程；

(2) 若过点 $Q(0, -1)$ 的直线 l 斜率存在，且直线 l 与动点 D 的轨迹相交于 M, N 两点。证明：直线 PM 与 PN 的斜率之积为定值。

【解析】(1) 由 $C: (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 16$ 得，圆心 $C(\sqrt{2}, 0)$ ，半径 $r = 4$ ，

∵ 点 D 在线段 AB 的垂直平分线上，∴ $|DA| = |DB|$ ，

$$\therefore |DB| + |DC| = |DA| + |DC| = |AC| = r = 4 > |BC| = 2\sqrt{2}，$$

由椭圆的定义可得动点 D 的轨迹是以 $B(-\sqrt{2}, 0)$ ， $C(\sqrt{2}, 0)$ 为焦点，长轴长为 $2a = 4$ 的椭圆。

从而 $a = 2, c = \sqrt{2}, b^2 = a^2 - c^2 = 2$ ，故所求动点 D 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) 设 $l: y = kx - 1$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，由 $\begin{cases} y = kx - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2 + 1)x^2 - 4kx - 2 = 0$ ，

显然 $\Delta = (-4k)^2 + 8(2k^2 + 1) = k^2 + 8 > 0$ ，∴ $x_1 + x_2 = \frac{4k}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = -\frac{2}{2k^2 + 1}$ 。

∵ $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ ，∴ 可设直线 PM 与 PN 的斜率分别为 k_1, k_2 则

$$\begin{aligned}
 k_1 k_2 &= \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1} \cdot \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2} = \frac{(kx_1 - \sqrt{2} - 1)}{x_1} \cdot \frac{(kx_2 - \sqrt{2} - 1)}{x_2} \\
 &= \frac{k^2 x_1 x_2 - (\sqrt{2} + 1)k(x_1 + x_2) + 2\sqrt{2} + 3}{x_1 x_2} = k^2 + \frac{-(\sqrt{2} + 1)k \times \frac{4k}{2k^2 + 1} + 2\sqrt{2} + 3}{-\frac{2}{2k^2 + 1}} \\
 &= k^2 + \frac{2k^2 + 3 + 2\sqrt{2}}{-2} = -\frac{3}{2} - \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

即直线 PM 与 PN 的斜率之积为定值.

【点睛】 方法点睛：求轨迹方程的常用方法

(1) 直接法：如果动点满足的几何条件本身就是一些几何量，如（距离和角）的等量关系，或几何条件简单明了易于表达，只需要把这种关系转化为 x, y 的等式，就能得到曲线的轨迹方程；

(2) 定义法：某动点的轨迹符合某一基本轨迹如直线、圆锥曲线的定义，则可根据定义设方程，求方程系数得到动点的轨迹方程；

(3) 几何法：若所求轨迹满足某些几何性质，如线段的垂直平分线，角平分线的性质，则可以用几何法，列出几何式，再代入点的坐标即可；

(4) 相关点法（代入法）：若动点满足的条件不变用等式表示，但动点是随着另一动点（称之为相关点）的运动而运动，且相关点满足的条件是明显的或是可分析的，这时我们可以用动点的坐标表示相关点的坐标，根据相关点坐标所满足的方程，求得动点的轨迹方程；

(5) 交轨法：在求动点轨迹时，有时会出现求两个动曲线交点的轨迹问题，这类问题常常通过解方程组得出交点（含参数）的坐标，再消去参数即可求出所求轨迹的方程.

【例 2】 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，

(I) 求椭圆 C 的标准方程；

(II) 若动点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

【解析】 (I) 可知 $c = \sqrt{5}$ ，又 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $\therefore a = 3$ ， $b^2 = a^2 - c^2 = 4$ ，椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ；

(II) 设两切线为 l_1, l_2 ，

① 当 $l_1 \perp x$ 轴或 $l_1 // x$ 轴时，对应 $l_2 // x$ 轴或 $l_2 \perp x$ 轴，可知 $P(\pm 3, \pm 2)$

② 当 l_1 与 x 轴不垂直且不平行时， $x_0 \neq \pm 3$ ，设 l_1 的斜率为 k ，则 $k \neq 0$ ， l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$ ， l_1 的方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ 联立 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \text{ 得 } (9k^2 + 4)x^2 + 18(y_0 - kx_0)kx + 9(y_0 - kx_0)^2 - 36 = 0,$$

$$\text{因为直线与椭圆相切, 所以 } \Delta = 0, \text{ 得 } 9(y_0 - kx_0)^2 k^2 - (9k^2 + 4)[(y_0 - kx_0)^2 - 4] = 0,$$

$$\therefore -36k^2 + 4[(y_0 - kx_0)^2 - 4] = 0, \therefore (x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 4 = 0$$

$$\text{所以 } k \text{ 是方程 } (x_0^2 - 9)x^2 - 2x_0y_0x + y_0^2 - 4 = 0 \text{ 的一个根,}$$

$$\text{同理 } -\frac{1}{k} \text{ 是方程 } (x_0^2 - 9)x^2 - 2x_0y_0x + y_0^2 - 4 = 0 \text{ 的另一个根,}$$

$$\therefore k \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) = \frac{y_0^2 - 4}{x_0^2 - 9}, \text{ 得 } x_0^2 + y_0^2 = 13, \text{ 其中 } x_0 \neq \pm 3, \text{ 所以点 } P \text{ 的轨迹方程为 } x^2 + y^2 = 13 \text{ (} x \neq \pm 3 \text{),}$$

$$\text{因为 } P(\pm 3, \pm 2) \text{ 满足上式, 综上知: 点 } P \text{ 的轨迹方程为 } x^2 + y^2 = 13.$$

【例 3】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 且椭圆 C 经过点 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.

(I) 求椭圆 C 的离心率

(II) 设过点 $A(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 Q 是 MN 上的点, 且

$$\frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2}, \text{ 求点 } Q \text{ 的轨迹方程.}$$

$$\text{【解析】(I) 由椭圆定义知, } 2a = |PF_1| + |PF_2| = \sqrt{\left(\frac{4}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } a = \sqrt{2}. \text{ 又由已知, } c = 1. \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{(II) 由 (I) 知, 椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \text{ 设点 } Q \text{ 的坐标为 } (x, y).$$

$$(i) \text{ 当直线 } l \text{ 与 } x \text{ 轴垂直时, 直线 } l \text{ 与椭圆 } C \text{ 交于 } (0, 1), (0, -1) \text{ 两点, 此时点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(0, 2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

(ii) 当直线 l 与 x 轴不垂直时, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$. 因为 M, N 在直线 l 上,

$$\text{可设点 } M, N \text{ 的坐标分别为 } (x_1, kx_1 + 2), (x_2, kx_2 + 2),$$

$$\text{则 } |AM|^2 = (1 + k^2)x_1^2, |AN|^2 = (1 + k^2)x_2^2. \text{ 又 } |AQ|^2 = x^2 + (y - 2)^2 = (1 + k^2)x^2.$$

$$\text{由 } \frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2}, \text{ 得 } \frac{2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{1}{(1 + k^2)x_1^2} + \frac{1}{(1 + k^2)x_2^2},$$

$$\text{即 } \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}. \text{ ①将 } y = kx + 2 \text{ 代入 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ 中, 得}$$

$(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$. ②由 $\Delta=(8k)^2-4\times(2k^2+1)\times6>0$, 得 $k^2>\frac{3}{2}$.

由②可知, $x_1+x_2=\frac{-8k}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{6}{2k^2+1}$, 代入①中并化简, 得 $x^2=\frac{18}{10k^2-3}$. ③

因为点 Q 在直线 $y=kx+2$ 上, 所以 $k=\frac{y-2}{x}$, 代入③中并化简, 得 $10(y-2)^2-3x^2=18$.

由③及 $k^2>\frac{3}{2}$, 可知 $0<x^2<\frac{3}{2}$, 即 $x\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)\cup\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

又 $\left(0, 2-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ 满足 $10(y-2)^2-3x^2=18$, 故 $x\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

由题意, $Q(x, y)$ 在椭圆 C 内, 所以 $-1\leq y\leq 1$.

又由 $10(y-2)^2=18+3x^2$ 有 $(y-2)^2\in\left[\frac{9}{5}, \frac{9}{4}\right]$ 且 $-1\leq y\leq 1$, 则 $y\in\left[\frac{1}{2}, 2-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$.

所以, 点 Q 的轨迹方程为 $10(y-2)^2-3x^2=18$, 其中 $x\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $y\in\left[\frac{1}{2}, 2-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$.

讲题型

圆锥曲线中的最值问题

基本不等式型的最值问题

【例1】已知直线 l 过点 $M(2, 1)$, 且分别与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴交于 A, B 两点, O 为原点, 当 $|MA|\cdot|MB|$ 取得最小值时, 直线 l 的方程为_____.

【答案】 $x+y-3=0$.

【解析】因为 $|MA|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$, $|MB|=\sqrt{4+4k^2}$, 所以 $|MA|\cdot|MB|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\cdot\sqrt{4+4k^2}=2\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}+2}\geq$

$2\times 2=4$, 当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$, 即 $k=-1$ 时取等号, 故直线方程为 $x+y-3=0$.

【例2】已知圆 $C_1: (x-a)^2+(y+2)^2=4$ 与圆 $C_2: (x+b)^2+(y+2)^2=1$ 外切, 则 ab 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】由两圆外切可得圆心 $(a, -2), (-b, -2)$ 之间的距离等于两圆半径之和, 即 $(a+b)^2=(2+1)^2$,

即 $9=a^2+b^2+2ab\geq 4ab$, 所以 $ab\leq\frac{9}{4}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 即 ab 的最大值是 $\frac{9}{4}$.

【例3】已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为()

A. 16

B. 14

C. 12

D. 10

【答案】A

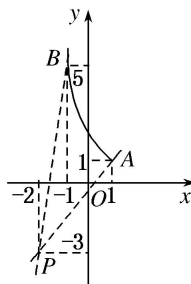
【解析】 设直线 $AB: y=k(x-1)(k \neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$, 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$, 所以 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$. 根据抛物线的定义, 得 $|AB|=x_1+x_2+2=4+\frac{4}{k^2}$; 因为 $AB \perp DE$, 同理可得 $|DE|=4+\frac{4}{k^2}=4+4k^2$, 所以 $|AB|+|DE|=4+\frac{4}{k^2}+4+4k^2=8+\frac{4}{k^2}+4k^2=8+4\left(\frac{1}{k^2}+k^2\right) \geq 8+4 \times 2 \sqrt{\frac{1}{k^2} \times k^2}=16$, 当且仅当 $k=\pm 1$ 时取等号, 故选 A.

斜率型的最值问题

【例 4】 已知实数 x, y 满足 $y=x^2-2x+2(-1 \leq x \leq 1)$, 试求 $\frac{y+3}{x+2}$ 的最大值和最小值.

【答案】 最大值是 8, 最小值是 $\frac{4}{3}$.

【解析】 如图, 作出 $y=x^2-2x+2(-1 \leq x \leq 1)$ 的图象——曲线段 AB , 则 $\frac{y+3}{x+2}$ 表示定点 $P(-2, -3)$ 和曲线段 AB 上任一点 (x, y) 的连线的斜率 k , 连接 PA, PB , 则 $k_{PA} \leq k \leq k_{PB}$. 易得 $A(1, 1), B(-1, 5)$, 所以 $k_{PA}=\frac{1-(-3)}{1-(-2)}=\frac{4}{3}, k_{PB}=\frac{5-(-3)}{-1-(-2)}=8$, 所以 $\frac{4}{3} \leq k \leq 8$, 故 $\frac{y+3}{x+2}$ 的最大值是 8, 最小值是 $\frac{4}{3}$.



【例 5】 已知实数 x, y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____, 最小值为_____.

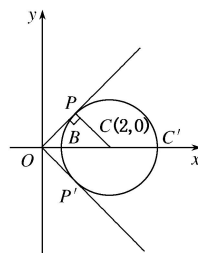
【答案】 最大值是 $\sqrt{3}$, 最小值是 $-\sqrt{3}$.

【解析】 法一: 如图, 方程 $x^2+y^2-4x+1=0$ 表示以点 $(2, 0)$ 为圆心, 以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆.

设 $\frac{y}{x}=k$, 即 $y=kx$, 当圆心 $(2, 0)$ 到直线 $y=kx$ 的距离为半径时, 即直线与圆相切,

斜率取得最大、最小值. 由 $\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$ 得 $k^2=3$, 所以 $k_{\max}=\sqrt{3}, k_{\min}=-\sqrt{3}$.

法二: 由平面几何知识, 得 $OC=2, CP=\sqrt{3}, \angle POC=60^\circ$, 直线 OP 的倾斜角为 60° , 直线 OP' 的倾斜角为 120° . 所以 $k_{\max}=\sqrt{3}, k_{\min}=-\sqrt{3}$.



函数型的最值问题

【例 6】 已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上, 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$, O 为原点, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{AP}$ 的最大值为_____.

【答案】6

【解析】 法一: 由题意知, $A(-2, 0)$, 令 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则 $\vec{OA} = (-2, 0), \vec{AP} = (\cos \alpha + 2, \sin \alpha)$, $\vec{OA} \cdot \vec{AP} =$

$(2, 0) \cdot (\cos\alpha + 2, \sin\alpha) = 2\cos\alpha + 4 \leq 6$, 故 $\cdot$ 的最大值为 6.

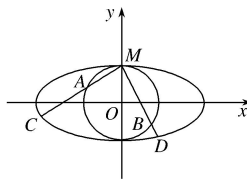
法二: 由题意知, $\cdot = (2, 0)$, 令 $P(x, y)$, $-1 \leq x \leq 1$, 则 $\cdot = (2, 0) \cdot (x+2, y) = 2x+4 \leq 6$,

故 $\cdot$ 的最大值为 6.

【例 7】如图, 圆 O 与离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相切于点 $M(0, 1)$,

过点 M 引两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 两直线与两曲线分别交于点 A, C 与点 B, D (均不重合).

若 P 为椭圆上任一点, 记点 P 到两直线的距离分别为 d_1, d_2 , 则 $d_1^2 + d_2^2$ 的最大值是()



A. 4

B. 5

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{25}{3}$

【答案】C

【解析】易知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 设 $P(x_0, y_0)$, 因为 $l_1 \perp l_2$, 则 $d_1^2 + d_2^2 = |PM|^2$

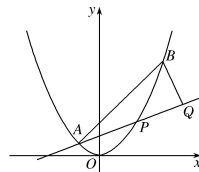
$= x_0^2 + (y_0 - 1)^2$, 因为 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 所以 $d_1^2 + d_2^2 = 4 - 4y_0^2 + (y_0 - 1)^2 = -3\left[y_0 + \frac{1}{3}\right]^2 + \frac{16}{3}$, 因为 $-1 \leq y_0 \leq 1$, 所以当 $y_0 =$

$-\frac{1}{3}$ 时, $d_1^2 + d_2^2$ 取得最大值 $\frac{16}{3}$, 此时点 $P\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. 故选 C.

【例 8】如图, 已知抛物线 $x^2 = y$, 点 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, 抛物线上的点 $P(x, y)\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right)$. 过点 B 作直线 AP 的垂线, 垂足为点 Q .

①求直线 AP 斜率的取值范围.

②求 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值.



【解析】①设直线 AP 的斜率为 k , $k = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}$.

因为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, 所以直线 AP 斜率的取值范围是 $(-1, 1)$.

②联立直线 AP 与 BQ 的方程 $\begin{cases} kx - y + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} = 0, \\ x + ky - \frac{9}{4}k - \frac{3}{2} = 0, \end{cases}$ 解得点 Q 的横坐标是 $x_Q = \frac{-k^2 + 4k + 3}{2k^2 + 1}$.

因为 $|PA| = \sqrt{1+k^2}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{1+k^2}(k+1)$, $|PQ| = \sqrt{1+k^2}(x_Q - x) = -\frac{k-1}{\sqrt{k^2+1}} \frac{k+1}{2}$,

所以 $|PA| \cdot |PQ| = -(k-1)(k+1)^3$. 令 $f(k) = -(k-1)(k+1)^3$.

因为 $f'(k) = -(4k-2)(k+1)^2$, 令 $f'(k) = 0$, 得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = -1$.

易得 $f(k)$ 在区间 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, 故 $f(k)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16}$.

因此当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $|PA| \cdot |PQ|$ 取得最大值 $\frac{27}{16}$.

点线型的最值问题

【例 9】(2021·安徽六安一模(文)) 已知 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: x + y - 2 = 0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作 $\odot O$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 则 $|OP| \cdot |AB|$ 最小值为 ()

A. 1

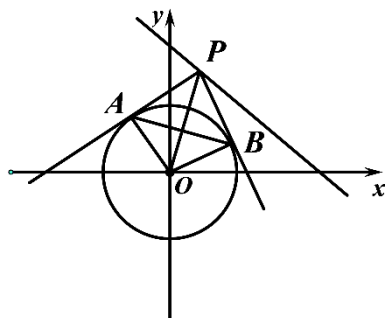
B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】如图所示:



圆心为 $O(0,0)$, 半径 $r=1$, 因为 $|OA|=|OB|$, $|PA|=|PB|$, 所以 $AB \perp OP$.

所以 $S_{\triangle POB} = \frac{1}{2}|OP| \cdot |AB|$, 又 $S_{\triangle POB} = 2S_{\triangle POA} = 2 \times \frac{1}{2} \times |OA| \times |PA| = |PA|$

所以 $|OP| \cdot |AB| = 2|PA|$. 要使 $|OP| \cdot |AB|$ 取到最小值即 $|PA|$ 取到最小值.

由勾股定理得 $|PA| = \sqrt{|PO|^2 - 1}$, 即要使 $|OP| \cdot |AB|$ 取到最小值即 $|OP|$ 取到最小值.

当直线 OP 与直线 $x + y - 2 = 0$ 垂直时, $|OP|$ 取到最小值.

所以 $|OP|_{\min} = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 即 $|PA|_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$. 所以 $|OP| \cdot |AB|$ 最小值为 2. 故选 C.

【例 10】已知 P 是直线 $l: 3x - 4y + 11 = 0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的两条切线, C 是圆心, 那么四边形 $PACB$ 面积的最小值是 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

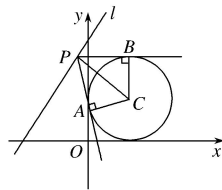
D. $2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ，圆心为 $C(1, 1)$ ，半径为 $r=1$ ，根据对称性可知，四边形 $PACB$ 的面积为 $2S_{\triangle APC}=2 \times \frac{1}{2}|PA|r=|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}$ ，要使四边形 $PACB$ 的面积最小，则只需

$|PC|$ 最小, 最小时为圆心到直线 $l: 3x-4y+11=0$ 的距离 $d = \frac{|3-4+11|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$. 所以

四边形 $PACB$ 面积的最小值为 $\sqrt{PC_{\min}^2 - r^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. 故选 C.



三点共线型最值问题

【例 11】已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ 的左、右焦点分别为点 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 若 $|BF_2| + |AF_2|$ 的最大值为 5, 则 $b =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$.

【解析】由 $0 < b < 2$ 可知, 焦点在 x 轴上, 因为过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 所以 $|BF_2| + |AF_2| + |BF_1| + |AF_1| = 2a + 2a = 4a = 8$, 所以 $|BF_2| + |AF_2| = 8 - |AB|$. 易知当直线 AB 垂直于 x 轴时, $|AB|$ 的值最小, $|BF_2| + |AF_2|$ 的值最大, 此时 $|AB| = b^2$, 所以 $5 = 8 - b^2$, 解得 $b = \sqrt{3}$.

【例 12】若点 A 的坐标为 $(3, 2)$, F 是抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点, 点 M 在抛物线上移动时, 使 $|MF| + |MA|$ 取得最小值的 M 的坐标为()

- A. $(0, 0)$
B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
C. $(1, \sqrt{2})$
D. $(2, 2)$

【答案】 D

【解析】过 M 点作准线的垂线，垂足是点 N ，则 $|MF| + |MA| = |MN| + |MA|$ ，当 A, M, N 三点共线时， $|MF| + |MA|$ 取得最小值，此时 $M(2, 2)$ ，故选 D.

专题 11 排列组合 二项式定理

讲高考

1. 【高考山东卷3】6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，则不同的安排方法共有 ()

- A. 120 种 B. 90 种 C. 60 种 D. 30 种

【答案】 C

【思路导引】利用分步计算原理，结合组合数的计算，计算出不同的安排方法.

【解析】首先从6名同学中选1名去甲场馆，方法数有 C_6^1 ；然后从其余5名同学中选2名去乙场馆，方法数有 C_5^2 ；

最后剩下的3名同学去并场馆，故不同的安排方法共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \times 10 = 60$ 种，故选 C.

【专家解读】本小题主要考查分步计数原理和组合数的计算.

2. 【高考全国 I 卷理数 8】 $\left(x + \frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 ()

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

【答案】C

【思路导引】求得 $(x+y)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} y^r$ ($r \in N$ 且 $r \leq 5$)，即可求得 $\left(x + \frac{y^2}{x}\right)$ 与 $(x+y)^5$

展开式的乘积为 $C_5^r x^{6-r} y^r$ 或 $C_5^r x^{4-r} y^{r+2}$ 形式，对 r 分别赋值为 3, 1 即可求得 x^3y^3 的系数，问题得解.

【解析】 $(x+y)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} y^r$ ($r \in N$ 且 $r \leq 5$)， $\therefore \left(x + \frac{y^2}{x}\right)$ 与 $(x+y)^5$ 展开式的乘积

可表示为： $xT_{r+1} = xC_5^r x^{5-r} y^r = C_5^r x^{6-r} y^r$ 或 $\frac{y^2}{x}T_{r+1} = \frac{y^2}{x}C_5^r x^{5-r} y^r = C_5^r x^{4-r} y^{r+2}$ ，在 $xT_{r+1} = C_5^r x^{6-r} y^r$ 中，令

$r=3$ ，可得： $xT_4 = C_5^3 x^3 y^3$ ，该项中 x^3y^3 的系数为 10，在 $\frac{y^2}{x}T_{r+1} = C_5^r x^{4-r} y^{r+2}$ 中，令 $r=1$ ，可得：

$\frac{y^2}{x}T_2 = C_5^1 x^3 y^3$ ，该项中 x^3y^3 的系数为 5， $\therefore x^3y^3$ 的系数为 $10+5=15$ ，故选 C.

【专家解读】本题主要考查了二项式定理及其展开式的通项公式，还考查了赋值法、转化能力及分析能力.

3. 【2019 年高考全国 III 卷理数】 $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为

A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

【答案】A

【解析】由题意得 x^3 的系数为 $C_4^3 + 2C_4^1 = 4+8=12$ ，故选 A.

【名师点睛】本题主要考查二项式定理，利用展开式通项公式求展开式指定项的系数.

4. 【高考全国 II 卷理数 14】4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去 1 个小区，每个小区至少安排 1 名同学，则不同的安排方法共有_____种.

【答案】36

【思路导引】根据题意，采用捆绑法，先取 2 名同学看作一组，现在可看成是 3 组同学分配到 3 个小区，即可求得答案.

【解析】 $\because$ 4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去 1 个小区，每个小区至少安排 1 名同学，

$\therefore$ 先取 2 名同学看作一组, 选法有: $C_4^2 = 6$, 现在可看成是 3 组同学分配到 3 个小区, 分法有: $A_3^3 = 6$, 根据分步乘法原理, 可得不同的安排方法 $6 \times 6 = 36$ 种, 故答案为: 36.

【专家解读】 本题主要考查了计数原理的实际应用, 解题关键是掌握分步乘法原理和捆绑法的使用, 考查了分析能力和计算能力.

5. 【高考天津卷 11】在 $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数是_____.

【答案】 10

【思路导引】 根据二项展开式的通项公式赋值即可求出.

【解析】 因为 $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \left(\frac{2}{x^2}\right)^r = C_5^r \cdot 2^r \cdot x^{5-3r} (r=0,1,2,3,4,5)$, 令

$5-3r=2$, 解得 $r=1$. 所以 x^2 的系数为 $C_5^1 \times 2 = 10$. 故答案为: 10.

6. 【2019 年高考浙江卷理数】在二项式 $(\sqrt{2}+x)^9$ 的展开式中, 常数项是_____; 系数为有理数的项的个数是_____.

【答案】 $16\sqrt{2}$ 5

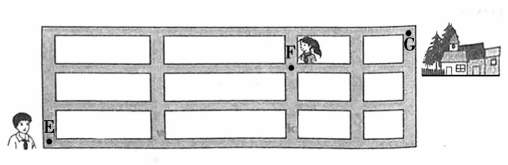
【解析】 由题意, $(\sqrt{2}+x)^9$ 的通项为 $T_{r+1} = C_9^r (\sqrt{2})^{9-r} x^r (r=0,1,2,\dots,9)$, 当 $r=0$ 时, 可得常数项为

$T_1 = C_9^0 (\sqrt{2})^9 = 16\sqrt{2}$; 若展开式的系数为有理数, 则 $r=1,3,5,7,9$, 有 $T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}$ 共 5 个项. 故答

案为: $16\sqrt{2}$, 5.

【名师点睛】 此类问题解法比较明确, 首要的是要准确记忆通项公式, 特别是“幂指数”不能记混, 其次, 计算要细心, 确保结果正确.

7. (2016 年全国 II) 如图, 小明从街道的 E 处出发, 先到 F 处与小红会合, 再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为



A. 24

B. 18

C. 12

D. 9

【答案】 B

【解析】 由题意可知 $E \rightarrow F$ 有 6 种走法, $F \rightarrow G$ 有 3 种走法, 由乘法计数原理知, 共有 $6 \times 3 = 18$ 种走法.

8. 【2017 新课标 II】安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排

方式共有

- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种

【答案】D

【解析】由题意可得，一人完成两项工作，其余两人每人完成一项工作，据此可得，只要把工作分成三份：有 C_4^2 种方法，然后进行全排列，由乘法原理，不同的安排方式共有 $C_4^2 \times A_3^3 = 36$ 种. 故选 D.

9. 【2018 全国卷Ⅲ】 $(x^2 + \frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^4 的系数为

- A. 10 B. 20 C. 40 D. 80

【答案】C

【解析】 $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} (\frac{2}{x})^r = C_5^r 2^r x^{10-3r}$ ，由 $10-3r=4$ ，得 $r=2$ ，所以 x^4 的系数为 $C_5^2 \times 2^2 = 40$.

10. 【2017 新课标 I】 $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为

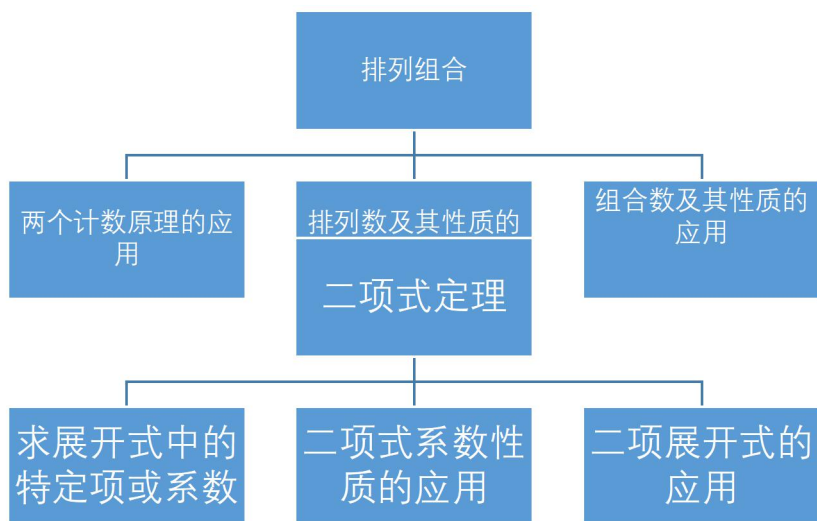
- A. 15 B. 20 C. 30 D. 35

【答案】C

【解析】 $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中含 x^2 的项为 $1 \cdot C_6^2 x^2 + \frac{1}{x^2} \cdot C_6^4 x^4 = 30x^2$ ，故 x^2 前系数为 30，选 C.

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
两个计数原理	1、利用分类加法计数原理解题时 2 个注意点 （1）根据问题的特点确定一个合适的分类标准，分类标准要统一，不能遗漏. （2）分类时，注意完成这件事的任何一种方法必须属于某一类，不能重复. 2、一类元素允许重复选取的计数问题，可以采用分步乘法计数原理来解决，关键是明确要完成的一件事是什么. 也就是说，用分步乘法计数原理求解元素可重复选取的问题时，哪类元素必须“用完”就以哪类元素作为分步的依据. 3、（1）注意在综合应用两个原理解决问题时，一般是先分类再分步. 在分步时可能又用到分类加法计数原理. ②注意对于较复杂的两个原理综合应用的问题，可恰当地列出示意图或列出表格，使问题形象化、直观化. （2）解决涂色问题，可按颜色的种数分类，也可按不同的区域分步完成.
排列与组合问题	1. 排列与组合最根本的区别在于“有序”和“无序”. 取出元素后交换顺序，如果与顺序有关，则是排列；如果与顺序无关，则是组合. 2. 排列、组合问题的求解方法与技巧 ①特殊元素优先安排；②合理分类与准确分步；③排列、组合混合问题要先选后排；④相邻问题捆绑处理；⑤不相邻问题插空处理；⑥定序问题倍缩法处理；⑦分排问题直排处理；⑧“小集团”排列问题先整体后局部；⑨构造模型；⑩正难则反，等价转化. 3、求解排列应用问题的 5 种主要方法 直接法：把符合条件的排列数直接列式计算 优先法：优先安排特殊元素或特殊位置 捆绑法：把相邻元素看作一个整体与其他元素一起排列，同时注意捆绑元素的内部排列 插空法：对不相邻问题，先考虑不受限制的元素的排列，再将不相邻的元素插在前面元素排列的空当中 间接法：正难则反、等价转化的方法. 4. 解排列组合问题常以元素(或位置)为主体，即先满足特殊元素(或位置)，再考虑其他元素(或

	位置). 对于排列组合的综合题目, 一般是将符合要求的元素取出或进行分组, 再对取出的元素或分好的组进行排列. 5. 定序问题可以先不考虑顺序限制, 排列后再除以定序元素的全排列. 6. 不同元素的分配问题, 往往是先分组再分配. 在分组时, 通常有三种类型: ①不均匀分组; ②均匀分组; ③部分均匀分组, 注意各种分组类型中, 不同分组方法的差异. 其次对于相同元素的“分配”问题, 常用的方法是采用“隔板法”.
二项式定理	1. 所谓二项展开式的特定项, 是指展开式中的某一项, 如第 n 项、常数项、有理项、字母指数为某些特殊值的项. 求解时, 先准确写出通项 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$, 再把系数与字母分离出来 (注意符号), 根据题目中所指定的字母的指数所具有的特征, 列出方程或不等式来求解即可. 2. 多项展开式问题一般是转化为二项展开式问题解决. 3. 赋值法研究二项式的系数和问题 “赋值法”普遍适用于恒等式, 是一种重要的方法, 对形如 $(ax+b)^n$、$(ax^2+bx+c)^m$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的式子求其展开式的各项系数之和, 常用赋值法, 只需令 $x=1$ 即可; 对形如 $(ax+by)^n$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的式子求其展开式各项系数之和, 只需令 $x=y=1$ 即可. 4. 整除问题的解题思路 利用二项式定理找出某两个数(或式)之间的倍数关系, 是解决有关整除问题和余数问题的基本思路, 关键是要合理地构造二项式, 并将它展开进行分析判断. 5. 求近似值的基本方法 利用二项式定理进行近似计算: 当 n 不很大, x 比较小时, $(1+x)^n \approx 1+nx$. 6. 二项式定理中, 通项公式 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ 是展开式的第 $k+1$ 项, 不是第 k 项. 7. (1)二项式系数与展开式中项的系数是两个不同的概念, 在 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ 中, C_n^k 是该项的二项式系数, 该项的系数还与 a, b 有关. (2)二项式系数的最值和增减性与指数 n 的奇偶性有关. 当 n 为偶数时, 中间一项的二项式系数最大; 当 n 为奇数时, 中间两项的二项式系数相等, 且同时取得最大值.

考查两个计数原理:

【例 1】(2021·湖北高三一模) 当前, 新冠肺炎疫情进入常态化防控新阶段, 防止疫情输入的任务依然繁重, 疫情防控工作形势依然严峻、复杂. 某地区安排 A, B, C, D, E 五名同志到三个地区开展防疫宣传活动, 每个地区至少安排一人, 且 A, B 两人安排在同一个地区, C, D 两人不安排在同一个地区, 则不同的分配方法总数为 ()

A. 86 种

B. 64 种

C. 42 种

D. 30 种

【答案】D

【解析】①当两个地区各分 2 人另一个地区分 1 人时，总数有 $C_2^1 \cdot A_3^3 = 12$ 种；②当两个地区各分 1 人另一个地区分 3 人时，总数有 $C_3^1 \cdot A_3^3 = 18$ 种，故满足条件的分法共有 $12 + 18 = 30$ 种，故选 D.

【名师点睛】关键点睛：解决本题的关键在于在分类的基础上，先选后排，最后由分类加法计数原理得出不同的分配方法总数.

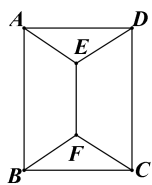
【例 2】如图，用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色，要求每个点涂一种颜色，且图中每条线段的两个端点涂不同颜色，则不同的涂色方法用

A. 288 种

B. 264 种

C. 240 种

D. 168 种


【答案】B

【解析】B, D, E, F 用四种颜色，则有 $A_4^4 \times 1 \times 1 = 24$ 种涂色方法；B, D, E, F 用三种颜色，则有

$A_4^3 \times 2 \times 2 + A_4^3 \times 2 \times 1 \times 2 = 192$ 种涂色方法；B, D, E, F 用两种颜色，则有 $A_4^2 \times 2 \times 2 = 48$ 种涂色方法；

所以共有 $24 + 192 + 48 = 264$ 种不同的涂色方法.

考查排列组合问题：

【例 1】(2021·安徽淮南一模)既是全面建成小康社会之年，又是脱贫攻坚收官之年，某地为巩固脱贫攻坚成果，选派了 5 名工作人员到 A、B、C 三个村调研脱贫后的产业规划，每个村至少去 1 人，不同的选派方法数有 () 种

A. 25

B. 60

C. 90

D. 150

【答案】D

【解析】解法一（分组分配）：把 5 各工作人员分成 3 组，有两类分法：

① $5 = 1 + 1 + 3$ 则有 $\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2} = 10$ 种；

② $5 = 2 + 2 + 1$ 则有 $\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$ 种

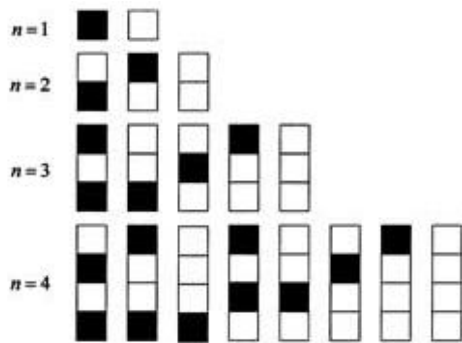
所以共有 $10 + 15 = 25$ 种分组方法，根据题意，所求方法数有 $25 A_3^3 = 150$ 个

解法二（排除法）： $\because 5$ 个工作人员仅去一个村子的方法数有 $1^5 C_3^1 = 3$ 个； 5 个工作人员仅去两个村子的方法数有 $(2^5 - 2) C_3^2 = 90$ 个， $\therefore 5$ 个工作人员去三个村子的方法数有 $3^5 - 90 - 3 = 150$ 个。故选 D。

【例 2】给 n 个自上而下相连的正方形着黑色或白色。当

$n \leq 4$ 时，在所有不同的着色方案中，黑色正方形互不相邻的着色方案如下图所示：

由此推断，当 $n = 6$ 时，黑色正方形互不相邻的着色方案共有 _____ 种，至少有两个黑色正方形相邻的着色方案共有 _____ 种，（结果用数值表示）



【答案】 21 43

【解析】 $n = 1, 2, 3, 4$ 时，黑色正方形互不相邻的着色方案种数分别为 2, 3, 5, 8，由此可看出后一个总是前 2 项之和，故 $n = 5$ 时应为 $5 + 8 = 13$ ， $n = 6$ 时应为 $8 + 13 = 21$ ； $n = 6$ 时，所有的着色方案种数为

$N = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 64$ 种， $\therefore$ 至少有两个黑色正方形相邻的着色方案共有 $64 - 21 = 43$ 种。

【例 3】(2021·上海杨浦区·高三一模) 从正方体的 8 个顶点中选取 4 个作为顶点，可得到四面体的个数为 ()

- A. $C_8^4 - 12$ B. $C_8^4 - 8$ C. $C_8^4 - 6$ D. $C_8^4 - 4$

【答案】A

【解析】从正方体的 8 个顶点中选取 4 个顶点有 C_8^4 种，正方体表面四点共面不能构成四面体有 6 种，正方体的六个对角面四点共面不能构成四面体有 6 种，所以可得到的四面体的个数为 $C_8^4 - 6 - 6 = C_8^4 - 12$ 种，故选 A。

【名师点睛】关键点点睛：本题主要采用间接法，如果直接讨论，需要讨论的情况比较多，所以正难则反，这是解题的关键。

考查二项式定理：

【例 1】已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为 ()

- A. 2^{12} B. 2^{11} C. 2^{10} D. 2^9

【答案】D

【解析】因为 $(1+x)^n$ 的展开式中的第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，所以 $C_n^3 = C_n^7$ ，解得 $n = 10$ ，所以二项

式 $(1+x)^{10}$ 的展开式中奇数项的二项式系数和为 $\frac{1}{2} \times 2^{10} = 2^9$ 。

【例 2】(2021·安徽蚌埠二模) 在 $\left(x + \frac{2}{x} - 1\right)^6$ 的展开式中, 除常数项外, 其余各项系数的和为 ()

- A. 63 B. -517 C. -217 D. -177

【答案】B

【解析】常数项是 $C_6^3 x^3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^3 + C_6^2 x^2 \cdot C_4^2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \cdot (-1)^2 + C_6^1 x \cdot C_5^1 \left(\frac{2}{x}\right) \cdot (-1)^4 + (-1)^6 = 581$,

令 $x=1$ 求各项系数和, $(1+2-1)^6 = 64$, 则除常数项外, 其余各项系数的和为 $64-581=-517$. 故选 B.

【例 3】在 $(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开式中, 记 $x^m y^n$ 项的系数为 $f(m, n)$, 则 $f(3, 0) + f(2, 1) + f(1, 2)$

+ $f(0, 3) =$

- A. 45 B. 60 C. 120 D. 210

【答案】C

【解析】由题意知 $f(3, 0) = C_6^3 C_4^0$, $f(2, 1) = C_6^2 C_4^1$, $f(1, 2) = C_6^1 C_4^2$, $f(0, 3) = C_6^0 C_4^3$, 因此

$f(3, 0) + f(2, 1) + f(1, 2) + f(0, 3) = 120$.

【例 4】(2021·湖南株洲一模) 若 $(1-\sqrt{2})^5 = a + b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a =$ ()

- A. -25 B. 25 C. 40 D. 41

【答案】D

【解析】二项式 $(1-\sqrt{2})^5$ 的展开式的通项公式为: $T_{r+1} = C_5^r (-1)^r (\sqrt{2})^r$,

则 $a = C_5^0 (-1)^0 (\sqrt{2})^0 + C_5^2 (-1)^2 (\sqrt{2})^2 + C_5^4 (-1)^4 (\sqrt{2})^4 = 41$, 故选 D.

【例 5】设 $a \in \mathbb{Z}$, 且 $0 \leq a < 13$, 若 $51^{2012} + a$ 能被 13 整除, 则 $a =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 11 D. 12

【答案】D

【解析】 $51^{2012} + a = (52-1)^{2012} + a = C_{2012}^0 \cdot 52^{2012} - C_{2012}^1 \cdot 52^{2011} + \dots + C_{2012}^{2011} \cdot 52 \cdot (-1)^{2011} + C_{2012}^{2012} \cdot (-1)^{2012} + a$, 因为 $C_{2012}^0 \cdot 52^{2012} - C_{2012}^1 \cdot 52^{2011} + \dots + C_{2012}^{2011} \cdot 52 \cdot (-1)^{2011}$ 能被 13 整除, 且 $51^{2012} + a$ 能被 13 整除, 所以 $C_{2012}^{2012} \cdot (-1)^{2012} + a = 1 + a$ 也能被 13 整除, 且 $0 \leq a < 13$, 因此 a 的值为 12. 故选 D.

讲题型

排列问题常用方法:

【例 1】6 名同学排成 1 排照相, 要求同学甲既不站在最左边又不站在最右边, 共有 _____ 种不同站法.

【答案】480

【解析】法一：(位置分析法)先从其他 5 人中安排 2 人站在最左边和最右边，再安排余下 4 人的位置，

分为两步：第 1 步，从除甲外的 5 人中选 2 人站在最左边和最右边，有 A_5^2 种站法；

第 2 步，余下 4 人(含甲)站在剩下的 4 个位置上，有 A_4^4 种站法.

由分步乘法计数原理可知，共有 $A_5^2 A_4^4 = 480$ (种)不同的站法.

法二：(元素分析法)先安排甲的位置(既不站在最左边又不站在最右边)，再安排其他 5 人的位置，

分为两步：第 1 步，将甲排在除最左边、最右边外的任意位置上，有 A_4^1 种站法；

第 2 步，余下 5 人站在剩下的 5 个位置上，有 A_5^5 种站法.

由分步乘法计数原理可知，共有 $A_4^1 A_5^5 = 480$ (种)不同的站法.

法三：(间接法)6 人无限制条件排队有 A_6^6 种站法，甲站在最左边或最右边时 6 人排队有 $2A_5^5$ 种站法，因此

符合条件的不同站法共有 $A_6^6 - 2A_5^5 = 480$ (种).

求解排列问题的常用方法：

(1)直接法：把符合条件的排列数直接列式计算.

(2)特殊元素(或位置)优先安排的方法，即先排特殊元素或特殊位置.

(3)捆绑法：相邻问题捆绑处理的方法，即可以把相邻元素看作一个整体参与其他元素排列，同时注意捆绑元素的内部排列.

(4)插空法：不相邻问题插空处理的方法，即先考虑不受限制的元素的排列，再将不相邻的元素插在前面元素排列的空当中.

(5)分排问题直排处理的方法.

(6)“小集团”排列问题中先集体后局部的处理方法.

(7)定序问题除法处理的方法，即可以先不考虑顺序限制，排列后再除以定序元素的全排列.

组合问题常用方法：

【例】某学校为了迎接市春季运动会，从 5 名男生和 4 名女生组成的田径运动队中选出 4 人参加比赛，要求男、女生都有，则男生甲与女生乙至少有 1 人入选的方法种数为()

- A. 85 B. 86 C. 91 D. 90

【答案】B

【解析】法一：(直接法)由题意，可分三类考虑：

第 1 类，男生甲入选，女生乙不入选，则方法种数为 $C_4^3 C_3^1 + C_3^2 C_4^1 + C_3^3 = 31$ ；

第 2 类，男生甲不入选，女生乙入选，则方法种数为 $C_4^1 C_3^3 + C_4^2 C_3^1 + C_4^3 = 34$ ；

第 3 类，男生甲入选，女生乙入选，则方法种数为 $C_3^2 + C_4^1 C_3^1 + C_4^2 = 21$.

所以男生甲与女生乙至少有 1 人入选的方法种数为 $31+34+21=86$.

法二：(间接法)从 5 名男生和 4 名女生中任意选出 4 人，男、女生都有的选法有 $C_5^3 - C_4^3 - C_4^4 = 120$ (种)；

男、女生都有，且男生甲与女生乙都没有入选的方法有 $C_4^3 - C_4^4 = 34$ (种). 所以男生甲与女生乙至少有 1 人入选的方法种数为 $120 - 34 = 86$.

分配问题常用方法：

【例】按下列要求分配 6 本不同的书，各有多少种不同的分配方式？

- (1)分成三份，1 份 1 本，1 份 2 本，1 份 3 本；
- (2)甲、乙、丙三人中，一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 3 本；
- (3)平均分成三份，每份 2 本；
- (4)平均分配给甲、乙、丙三人，每人 2 本；
- (5)分成三份，1 份 4 本，另外两份每份 1 本；
- (6)甲、乙、丙三人中，一人得 4 本，另外两人每人得 1 本；
- (7)甲得 1 本，乙得 1 本，丙得 4 本.

【解析】(1)无序不均匀分组问题：

先选 1 本，有 C_6^1 种选法；再从余下的 5 本中选 2 本，有 C_5^2 种选法；最后余下 3 本全选，有 C_3^3 种选法. 故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ (种).

(2)有序不均匀分组问题：

由于甲、乙、丙是不同的三人，在第(1)题的基础上，还应考虑再分配，共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$ (种).

(3)无序均匀分组问题：

先分三步，则应是 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种方法，但是这里出现了重复. 不妨记六本书为 A, B, C, D, E, F ，若第一步取了 AB ，第二步取了 CD ，第三步取了 EF ，记该种分法为 (AB, CD, EF) ，则 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种分法中还有 (AB, EF, CD) ， (CD, AB, EF) ， (CD, EF, AB) ， (EF, CD, AB) ， (EF, AB, CD) ，共有 A_3^3 种情况，而这 A_3^3 种情况仅是 AB, CD, EF 的顺序不同，因此只能作为一种分法，故分配方式有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ (种).

(4)有序均匀分组问题：在(3)的基础上再分配给 3 个人，共有分配方式 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ (种).

(5)无序部分均匀分组问题：共有 $\frac{C_4^3 C_1^1 C_1^1}{A_2^2} = 15$ (种).

(6)有序部分均匀分组问题：在(5)的基础上再分配给 3 个人，共有分配方式 $\frac{C_4^3 C_1^1 C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90$ (种).

(7)直接分配问题，甲选 1 本有 C_6^1 种方法，乙从余下 5 本中选 1 本有 C_5^1 种方法，余下 4 本留给丙有 C_4^4 种方法，共有 $C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4 = 30$ (种).

解决分组分配问题的策略:

(1)对于整体均分,解题时要注意分组后,不管它们的顺序如何,都是一种情况,所以分组后一定要除以 A_n^n (为均分的组数)、避免重复计数.

(2)对于部分均分,解题时注意重复的次数是均匀分组的阶乘数,即若有 m 组元素个数相等,则分组时应除以 $m!$,一个分组过程中有几个这样的均匀分组就要除以几个这样的全排列数.

(3)对于不等分组,只需先分组,后排列,注意分组时任何组中元素的个数都不相等,所以不需要除以全排列数.

二项式定理中的赋值法

【例】若 $(2x+\sqrt{3})^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$, 则 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值是_____.

【答案】1

【解析】令 $x=1$, 得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=(2+\sqrt{3})^4$, ① 令 $x=-1$, 得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=(-2+\sqrt{3})^4$. ②
故 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2=(a_0+a_2+a_4+a_1+a_3)(a_0+a_2+a_4-a_1-a_3)=(2+\sqrt{3})^4 \times (-2+\sqrt{3})^4=(3-4)^4=1$.

小结:赋值法是求展开式中的系数与系数和的常用方法,注意所赋的值要有利于问题的解决,可以取一个或几个值,常赋的值为 $0, \pm 1$. 一般地,若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, 则 $f(x)$ 的展开式中各项系数之和为 $f(1)$,

奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\dots=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$, 偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\dots=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$.

专题 12 概率与统计

讲高考

1. 【高考全国 I 卷文数 4】设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心,在 O, A, B, C, D 中任取 3 点,则取到的 3 点共线的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{5}$

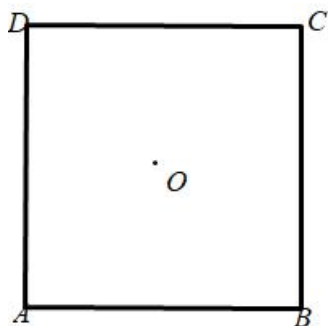
【答案】A

【思路导引】列出从 5 个点中任取 3 个点的所有情况,再列出 3 点共线的情况,用古典概型的概率计算公式运算即可.

【解析】如图,从 O, A, B, C, D 5 个点中任取 3 个有 $\{O, A, B\}, \{O, A, C\}, \{O, A, D\}, \{O, B, C\}, \{O, B, D\}, \{O, C, D\}, \{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}$, 共 10 种不同取法,

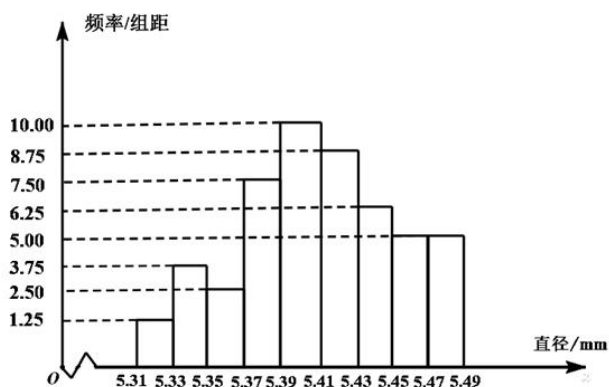
3 点共线只有 $\{O, A, C\}$ 与 $\{O, B, D\}$ 共 2 种情况，由古典概型的概率计算公式知，取到 3 点共线的概率为

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \text{ 故选 A.}$$



【专家解读】本题主要考查古典概型的概率计算问题，采用列举法，考查学生数学运算能力，是一道容易题.

2. 【高考天津卷 4】从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组： $[5.31, 5.33), [5.33, 5.35), \dots, [5.45, 5.47), [5.47, 5.49]$ ，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 内的个数为（ ）



A. 10 B. 18 C. 20 D. 36

【答案】B

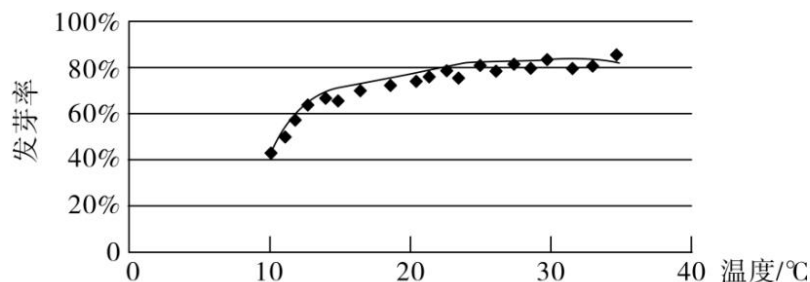
【思路导引】由题意首先确定直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 之间的零件频率，然后计算其个数即可.

【解析】由题意可得，直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 之间的零件频率为： $(6.25 + 5.00) \times 0.02 = 0.225$ ，

则区间 $[5.43, 5.47)$ 内零件的个数为： $80 \times 0.225 = 18$ ，故选 B.

【专家解读】本题主要考查频率分布直方图的计算与实际应用.

3. 【高考全国 I 卷文理数 5】某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在 10°C 至 40°C 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是

()

A. $y = a + bx$

B. $y = a + bx^2$

C. $y = a + be^x$

D. $y = a + b \ln x$

【答案】D

【思路导引】根据散点图的分布可选择合适的函数模型.

【解析】由散点图分布可知，散点图分布在一个对数函数的图像附近，因此，最适合作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 $y = a + b \ln x$ ，故选 D.

【专家解读】本题考查函数模型的选择，主要观察散点图的分布.

4. 【高考山东卷 5】某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳，60% 的学生喜欢足球，82% 的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ()

A. 62%

B. 56%

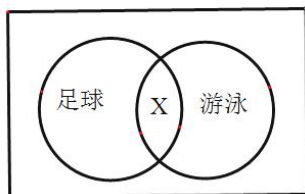
C. 46%

D. 42%

【答案】C

【思路导引】记“该中学学生喜欢足球”为事件 A ，“该中学学生喜欢游泳”为事件 B ，则“该中学学生喜欢足球或游泳”为事件 $A+B$ ，“该中学学生既喜欢足球又喜欢游泳”为事件 $A \cdot B$ ，然后根据积事件的概率公式 $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B)$ 可得结果.

【解析】记“该中学学生喜欢足球”为事件 A ，“该中学学生喜欢游泳”为事件 B ，则“该中学学生喜欢足球或游泳”为事件 $A+B$ ，“该中学学生既喜欢足球又喜欢游泳”为事件 $A \cdot B$ ，则 $P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.82$ ， $P(A+B) = 0.96$ ，所以 $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0.6 + 0.82 - 0.96 = 0.46$ ，所以该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例为 46%，故选：C.



【专家解读】本题考查了积事件的概率公式.

5. 【高考江苏卷 3】已知一组数据 $4, 2a, 3-2a, 5, 6$ 的平均数为 4, 则 a 的值是_____.

【答案】2

【解析】由题意得 $\frac{4+2a+(3-a)+5+6}{5} = 4$, 解得 $a = 2$.

【专家解读】本题主要考查平均数的计算公式.

6. 【高考江苏卷 25】甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙口袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋, 重复 n 次这样的操作, 记甲口袋中黑球个数为 X_n , 恰有 2 个黑球的概率为 p_n , 恰有 1 个黑球的概率为 q_n .

(1) 求 $p_1 \cdot q_1$ 和 $p_2 \cdot q_2$;

(2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示).

【答案】(1) $p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3}; p_2 = \frac{7}{27}, q_2 = \frac{16}{27}$; (2) $2p_n + q_n = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3}$

【思路导引】(1) 直接根据操作, 根据古典概型概率公式可得结果;

(2) 根据操作, 依次求 p_n, q_n , 即得递推关系, 构造等比数列求得 $2p_n + q_n$, 最后根据数学期望公式求结果.

【解析】(1) $p_1 = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}, p_2 = p_1 \times \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + q_1 \times \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{7}{27},$
 $q_2 = p_1 \times \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + q_1 \times \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{3 \times 3} + 0 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{16}{27}.$

(2) $p_n = p_{n-1} \times \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + q_{n-1} \times \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{9} q_{n-1},$

$q_n = p_{n-1} \times \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + q_{n-1} \times \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{3 \times 3} + (1 - p_{n-1} - q_{n-1}) \times \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = -\frac{1}{9} q_{n-1} + \frac{2}{3},$

因此 $2p_n + q_n = \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} q_{n-1} + \frac{2}{3}$, 从而 $2p_n + q_n = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3} \therefore 2p_n + q_n - 1 = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1} - 1),$

即 $2p_n + q_n - 1 = (2p_1 + q_1 - 1) \frac{1}{3^{n-1}} \therefore 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3^n}, E(X_n) = 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3^n}.$

【专家解读】本题考查古典概型概率、概率中递推关系、构造法求数列通项、数学期望公式, 考查综合分析求解能力.

7. 【高考山东卷 19】

为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的

PM2.5 和 SO_2 浓度 (单位: $\mu g / m^3$), 得下表:

SO_2	$[0, 50]$	$(50, 150]$	$(150, 475]$

PM2.5			
[0, 35]	32	18	4
(35, 75]	6	8	12
(75, 115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面 2×2 列联表：

SO_2		
$PM_{2.5}$	[0, 150]	(150, 475]
[0, 75]		
(75, 115]		

(3) 根据 (2) 中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度与 SO_2 浓度有关？

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ，

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1) 0.64；(2) 答案见解析；(3) 有.

【思路导引】(1) 根据表格中数据以及古典概型的概率公式可求得结果；(2) 根据表格中数据可得 2×2 列联表；

(3) 计算出 K^2 ，结合临界值表可得结论.

【解析】(1) 由表格可知，该市 100 天中，空气中的 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150 的天数有

$32 + 6 + 18 + 8 = 64$ 天，

所以该市一天中，空气中的 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150 的概率为 $\frac{64}{100} = 0.64$ ；

(2) 由所给数据，可得 2×2 列联表为：

SO_2			
$PM_{2.5}$	[0,150]	(150,475]	合计
[0,75]	64	16	80

(75,115]	10	10	20
合计	74	26	100

(3) 根据 2×2 列联表中的数据可得

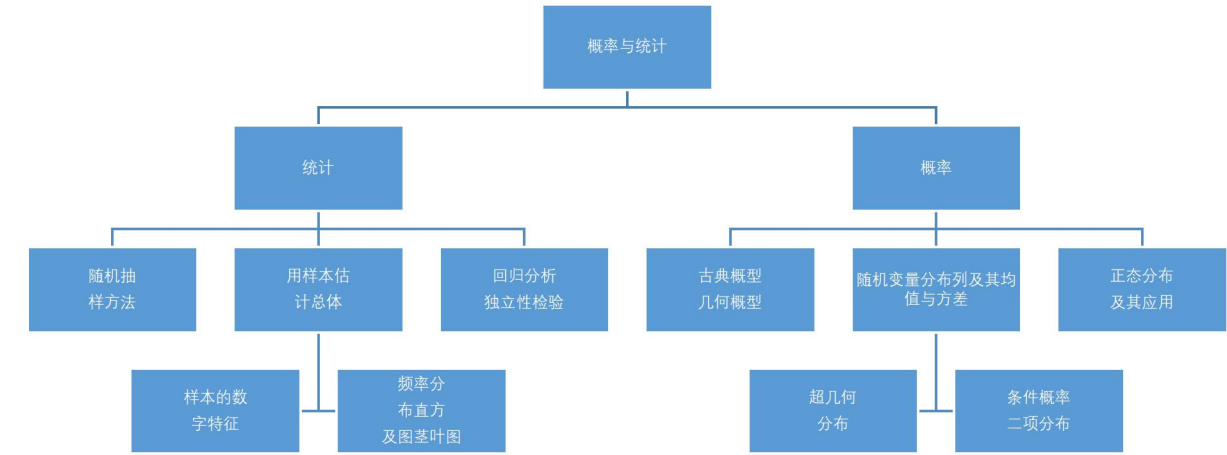
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100 \times (64 \times 10 - 16 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 74 \times 26} = \frac{3600}{481} \approx 7.4844 > 6.635,$$

因为根据临界值表可知，有 99% 的把握认为该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度与 SO_2 浓度有关。

【专家解读】 本题考查了古典概型的概率公式，考查了完善 2×2 列联表，考查了独立性检验。

讲考向

一、考向分析：



二

考查内容	解 题 技 巧
随机抽样	1. 随机数法编号要求：应保证各号数的位数相同，而抽签法则无限制。 2. 不论哪种抽样方法，总体中的每一个个体入样的概率是相同的。 3. 系统抽样是等距抽样，入样个体的编号相差 $\frac{N}{n}$ 的整数倍。 4. 分层抽样是按比例抽样，每一层入样的个体数为该层的个体数乘以抽样比。
	1. 绘制频率分布直方图时的 2 个注意点 (1)制作好频率分布表后，可以利用各组的频率之和是否为 1 来检验该表是否正确。

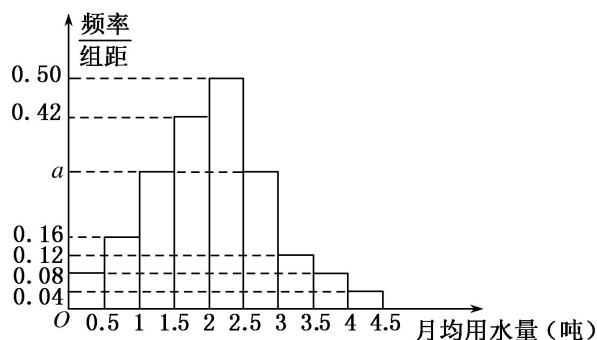
用样本估计总体	(2)频率分布直方图的纵坐标是$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$，而不是频率。 2. 由频率分布直方图进行相关计算时，需掌握的 2 个关系式 (1)$\frac{\text{频率}}{\text{组距}} \times \text{组距} = \text{频率}$。 (2)$\frac{\text{频数}}{\text{样本容量}} = \text{频率}$，此关系式的变形为$\frac{\text{频数}}{\text{频率}} = \text{样本容量}$，样本容量$\times$频率=频数。 3.茎叶图的优缺点 由茎叶图可以清晰地看到数据的分布情况，这一点同频率分布直方图类似。它优于频率分布直方图的第一点是从茎叶图中能看到原始数据，没有任何信息损失，第二点是茎叶图便于记录和表示。其缺点是当样本容量较大时，作图较烦琐。 4、用样本估计总体时，样本的平均数、标准差只是总体的平均数、标准差的近似。实际应用中，需先计算数据的平均数，分析平均水平，再计算方差(标准差)，分析稳定情况。 5. 若给出图形，一方面可以由图形得到相应的样本数据，计算平均数、方差(标准差)；另一方面，可以从图形直观分析样本数据的分布情况，大致判断平均数的范围，并利用数据的波动性比较方差(标准差)的大小。
回归分析 独立性检验	1、相关关系的直观判断方法就是作出散点图，若散点图呈带状且区域较窄，说明两个变量有一定的线性相关性，若呈曲线型也是有相关性，若呈图形区域且分布较乱则不具有相关性。 两个具有相关关系的变量之间，可以从散点图直观看出是否具有较好的线性相关关系，相关系数的绝对值越接近 1，其线性相关关系越强。 2. 回归直线方程$\hat{y} = bx + a$必经过样本点中心$(\bar{x}, \bar{y})$。 3. 在分析两个变量的相关关系时，可根据样本数据作出散点图来确定两个变量之间是否具有相关关系，若具有线性相关关系，则可通过线性回归方程来估计和预测。 4、解决独立性检验问题的 3 步骤 (1) 根据样本数据制成 2×2 列联表。 (2) 根据公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，计算 K^2 的值。 (3) 查表比较 K^2 与临界值的大小关系，作统计判断。 提醒：应用独立性检验方法解决问题，易出现不能准确计算 K^2 值的错误。
	1. “几何概型”与“古典概型”两者共同点是基本事件的发生是等可能的，不同之处是几何概型的基本事件的个数是无限的，古典概型中基本事件的个数是有限的。 2、不放回的试验中，抽取几次可以看成一次性抽取几个。如在 n 个球中，不放回地随机抽取 m 个球，可以看成一次性抽取 m 个球，则共有 C_n^m 种取法。

几何概型 古典概型	3、几何概型一般就是直线上的、平面上的和空间中的，直线上的几何概型的概率表现为线段的长度之比，平面上的就是区域面积的比，空间中的就是体积之比等。解答几何概型试题要善于根据这些特点寻找基本事件所在线、面、体，寻找随机事件所在的线、面、体，把几何概型的计算转化为相应的长度、面积或体积的比值的计算。正确确定基本事件占有的空间位置和随机事件在这个位置中的情况，然后计算相关的量，再根据几何概型的公式计算概率。
随机变量分布列及其均值与方差	1. 分布列性质的两个作用 (1)利用分布列中各事件概率之和为 1 可求参数的值。 (2)随机变量ξ所取的值分别对应的事件是两两互斥的，利用这一点可求相关事件的概率。 2、求随机变量的分布列的三个步骤 找：理解并确定$\xi=x_i$的意义，找出随机变量ξ的所有可能的取值 $x_i(i=1,2, \dots, n)$。 求：借助概率的有关知识求出随机变量ξ取每一个值的概率 $P(\xi=x_i)=p_i(i=1,2, \dots, n)$。 注意应用计数原理、古典概型等知识。 列：列出表格并检验所求的概率是否满足分布列的两条性质。 3. 超几何分布的两个特点 (1)超几何分布是不放回抽样问题。 (2)随机变量为抽到的某类个体的个数。 4. 超几何分布的应用条件及实质 (1)条件：①考察对象分两类；②已知各类对象的个数；③从中抽取若干个个体，考察某类个体个数ξ的概率分布。 (2)实质：古典概型问题。 5、条件概率的求法 (1)定义法：先求 $P(A)$和 $P(AB)$，再由 $P(B A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$求 $P(B A)$。 (2)基本事件法：借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数 $n(A)$，再求事件 AB 所包含的基本事件数 $n(AB)$，得 $P(B A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$。 1. 相互独立事件与互斥事件的区别 相互独立事件是指两个事件发生的概率互不影响，计算式为 $P(AB)=P(A)P(B)$，互斥事件是指在同一试验中，两个事件不会同时发生，计算公式为 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$。 2. 求相互独立事件同时发生的概率的主要方法 (1)利用相互独立事件的概率乘法公式直接求解，$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$只有在事件 A, B 相互独立时，公式才成立，此时 $P(B)=P(B A)$。

	(2)正面计算较繁(如求用“至少”表述的事件的概率)或难以入手时,可从其对立事件入手计算。 3、利用独立重复试验概率公式可以简化求概率的过程,但需要注意检查该概率模型是否满足公式 $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 的三个条件: (1)在一次试验中某事件 A 发生的概率是一个常数 p; (2)n 次试验不仅是在完全相同的情况下进行的重复试验,而且各次试验的结果是相互独立的; (3)该公式表示 n 次试验中事件 A 恰好发生了 k 次的概率。 4、解决正态分布问题有三个关键点: ①对称轴 $x=\mu$; ②标准差 σ; ③分布区间。利用对称性可求指定范围内的概率值; 由 μ, σ, 分布区间的特征进行转化,使分布区间转化为 3σ 特殊区间,从而求出所求概率。 5、超几何分布的抽取是不放回抽取,各次抽取不独立,二项分布的抽取是独立的,各次抽取相互独立。当超几何分布所对应的总体数量很大时可以近似地看作二项分布。 6、求离散型随机变量 ξ 的均值与方差的步骤 (1)理解 ξ 的意义,写出 ξ 可能的全部值。(2)求 ξ 取每个值的概率。 (3)写出 ξ 的分布列。 (4)由均值的定义求 $E(\xi)$。 (5)由方差的定义求 $D(\xi)$。 7. 判断一个随机变量是否服从二项分布,关键有二: 其一是独立性,即一次试验中,事件发生与不发生二者必居其一; 其二是重复性,即试验是独立重复地进行了 n 次。 8、二项分布的期望与方差 (1)如果 $\xi \sim B(n, p)$, 则用公式 $E(\xi)=np$; $D(\xi)=np(1-p)$ 求解,可大大减少计算量。 (2)有些随机变量虽不服从二项分布,但与之具有线性关系的另一随机变量服从二项分布,这时,可以综合应用 $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$ 以及 $E(\xi)=np$ 求出 $E(a\xi+b)$, 同样还可求出 $D(a\xi+b)$。

二、考向讲解

考查频率分布直方图、茎叶图：



【例 1】我国是世界上严重缺水的国家，某市为了制定合理的节水方案，对居民用水情况进行了调查。通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量(单位：吨)。将数据按照 $[0,0.5)$ ， $[0.5,1)$ ， $\dots$ ， $[4,4.5]$ 分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图。

(1)求直方图中 a 的值。

(2)设该市有 30 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数，说明理由。

(3)估计居民月均用水量的中位数。

【解析】(1)由频率分布直方图可知，月均用水量在 $[0,0.5)$ 内的频率为 $0.08 \times 0.5 = 0.04$ ，同理，在 $[0.5,1)$ ， $[1.5,2)$ ， $[2,2.5)$ ， $[3,3.5)$ ， $[3.5,4)$ ， $[4,4.5]$ 内的频率分别为 0.08，0.21，0.25，0.06，0.04，0.02。由 $1 - (0.04 + 0.08 + 0.21 + 0.25 + 0.06 + 0.04 + 0.02) = 2a \times 0.5$ ，解得 $a = 0.30$ 。

(2)由(1)知，该市 100 位居民中月均用水量不低于 3 吨的频率为 $0.06 + 0.04 + 0.02 = 0.12$ 。由以上样本的频率分布，可以估计 30 万居民中月均用水量不低于 3 吨的人数为 $300\,000 \times 0.12 = 36\,000$ 。

(3)设中位数为 x 吨。因为前 5 组的频率之和为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.21 + 0.25 = 0.73 > 0.5$ ，而前 4 组的频率之和为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.21 = 0.48 < 0.5$ ，所以 $2 \leq x < 2.5$ 。由 $0.50 \times (x - 2) = 0.5 - 0.48$ ，解得 $x = 2.04$ ，故可估计居民月均用水量的中位数为 2.04 吨。

【例 2】(2021 江西吉安模拟(文))某学生准备参加某科目考试，在 12 次模拟考试中，所得分数的茎叶图如图所示，则此学生该门功课考试成绩的众数与中位数分别为 ()

	考试成绩
8	6 8
9	1 3 3 4 5 5 5 7 8 8

A. 95, 94

B. 95, 94.5

C. 93, 94.5

D. 95, 95

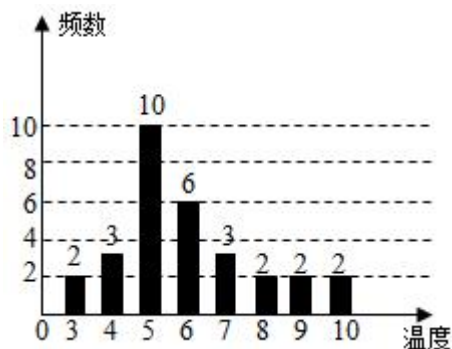
【答案】B

【解析】由茎叶图可得众数为 95，中位数为 $\frac{94+95}{2} = 94.5$ ，故选 B。

【名师点睛】关键点点睛：该题考查的是有关利用茎叶图求众数和中位数的问题，解题的关键点是理解众数和中位数的定义。

考查样本数据特征：

【例 1】(2021·安徽淮北一模(理)) 某地气象局把当地某月(共 30 天)每一天的最低气温作了统计, 并绘制了如下图所示的统计图. 记这组数据的众数为 M , 中位数为 N , 平均数为 P , 则 ()



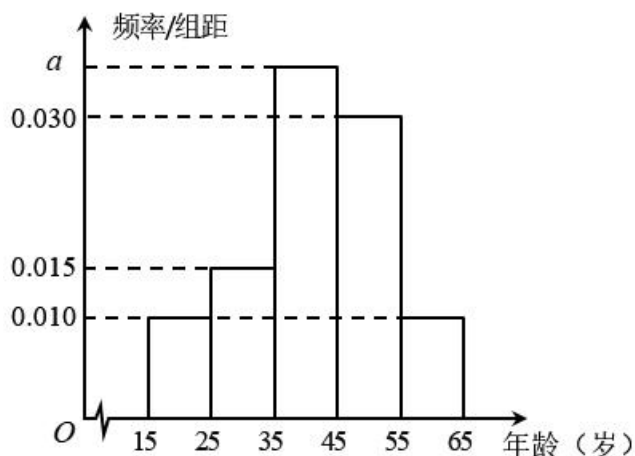
- A. $M < N < P$ B. $N < M < P$ C. $P < M = N$ D. $P < N < M$

【答案】A

【解析】由统计图得: 该月温度的中位数为 $N = \frac{5+6}{2} = 5.5$, 众数为 $M = 5$,

平均数为 $P = \frac{1}{30}(2 \times 3 + 3 \times 4 + 10 \times 5 + 6 \times 6 + 3 \times 7 + 2 \times 8 + 2 \times 9 + 2 \times 10) \approx 5.97$. $\therefore M < N < P$. 故选 A.

【例 2】(2021 贵州遵义模拟) 为激活国内消费市场, 挽回疫情造成的损失, 国家出台一系列的促进国内消费的优惠政策, 某机构从某一电商的线上交易大数据中来跟踪调查消费者的购买力, 界定 3 至 8 月份购买商品在 5000 元以上人群属“购买力强人群”, 购买商品在 5000 元以下人群属“购买力弱人群”现从电商平台消费人群中随机选出 200 人, 发现这 200 人中属购买力强的人数占 80%, 并将这 200 人按年龄分组, 记第 1 组 $[15, 25)$, 第 2 组 $[25, 35)$, 第 3 组 $[35, 45)$, 第 4 组 $[45, 55)$, 第 5 组 $[55, 65)$, 得到的频率分布直方图, 如图所示.



- 求出频率分布直方图中的 a 值和这 200 人的平均年龄;
- 从第 1, 2 组中用分层抽样的方法抽取 5 人, 并再从这 5 人中随机抽取 2 人进行电话回访, 求这两人恰好属于不同组别的概率;

(3) 把年龄在第 1, 2, 3 组的居民称为青少年组, 年龄在第 4, 5 组的居民称为中老年组, 若选出的 200 人中“购买力弱人群”的中老年人有 20 人, 问是否有 99% 的把握认为是否“购买力强人群”与年龄有关?

附:

$P(K^2 \geq K_0)$	0. 150	0. 100	0. 050	0. 025	0. 010	0. 005	0. 001
k_0	2. 072	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635	7. 879	10. 828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d$$

【解析】(1) 由题意得: $(2 \times 0.01 + 0.015 + 0.03 + a) \times 10 = 1$, 所以 $a = 0.035$,

200 人的平均年龄为: $20 \times 0.1 + 30 \times 0.15 + 40 \times 0.35 + 50 \times 0.3 + 60 \times 0.1 = 41.5$ 。

(2) 由题意得: 利用分层抽样的方法从第一组抽取 2 人, 从第二组抽取 3 人,

设两人恰好属于不同组别为事件 A , 则 $P(A) = 1 - \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{5}$ 。

(3) 由题意可得 2×2 列联表为:

	购买力强人群	购买力弱人群	合计
青少年组	100	20	120
中老年组	60	20	80
合计	160	40	200

故 $K^2 = \frac{200(100 \times 20 - 60 \times 20)^2}{120 \times 80 \times 160 \times 40} = \frac{25}{12} \approx 2.083 < 6.635$, 故没有 99% 的把握认为是否“购买力强人群”与年龄有关。

【名师点睛】本题主要考查了利用频率分布直方图求平均数的问题, 考查了对立事件的概率公式, 考查了列联表、独立性检验的基本思想、考查了考生的分析能力、计算能力, 属于中档题。

考查古典概型、几何概型:

【例 1】(2021·海南高三二模) 为了丰富教职工业余文化生活, 某校计划在假期组织全体老师外出旅游, 并给出了两个方案(方案一和方案二), 每位老师均选择且只选择一种方案, 其中有 50% 的男老师选择方案一, 有 75% 的女老师选择方案二, 且选择方案一的老师中女老师占 40%, 那么该校全体老师中女老师的比例为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{7}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】B

【解析】设该校男老师的人数为 x ，女老师的人数为 y ，则可得如下表格：

	方案一	方案二
男老师	$0.5x$	$0.5x$
女老师	$0.25y$	$0.75y$

由题意， $\frac{0.25y}{0.5x+0.25y}=0.4$ ，可得 $\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$ ，所以 $\frac{y}{x+y}=\frac{4}{7}$ 。故选 B。

【例 2】(2021·陕西咸阳一模) 中国书法历史悠久、源远流长。书法作为一种艺术，以文字为载体，不断地反映着和丰富着华夏民族的自然观、宇宙观和人生观。谈到书法艺术，就离不开汉字，汉字是书法艺术的精髓，汉字本身具有丰富的意象和可塑的规律性，使汉字书写成为一门独特的艺术。我国书法大体可分为篆、隶、楷、行、草五种书体，如图：以“国”字为例，现有一名书法爱好者准备从五种书体中任意选两种进行研习，则他恰好不选草书体的概率为（ ）



A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

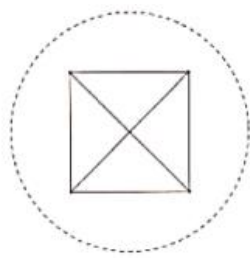
【解析】从五种书体中任意选两种进行研习，共有 $C_5^2=10$ 种，则不选草书体共有 $C_4^2=6$ 种，则不选草书体的

概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 。故选 A。

【例 3】(2021 江苏宿迁中学高三期中) 古埃及、古印度、古巴比伦和中国是四大文明古国之一，金字塔（如图 1）作为古埃及劳动人民的智慧结晶，是历史留给当下的宝贵遗产著名的胡夫金字塔的俯视图如图 2 所示，该金字塔的高 146.5 米，底面正方形边长 230 米。若小明在距离金字塔底面中心 230 米的圆周上任取一点（圆周上所有点被选取的概率相等），从该点处观察金字塔，则小明可以同时看到金字塔两个侧面的概率为（ ）



(1)



(2)

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

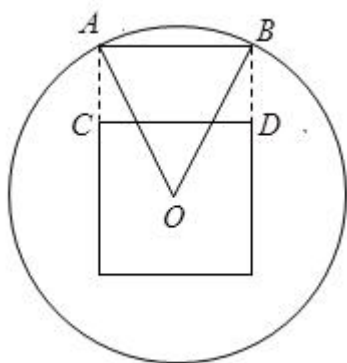
D. $\frac{3}{4}$

【答案】A

【解析】如图所示，中间正方形的边长为 230 米，可得 $AB = CD = 230$ 米，其中在 $\widehat{AB}$ 处的任意一点，只能看到金字塔的一个侧面，又由圆的半径为 230 米，其中 $OA = OB = 230$ 米，所以 $\triangle ABO$ 为等边三角形，即

$\angle AOB = 60^\circ$ ，其中由四个这的区域，只能看到金字塔的一个侧面，所以只能看到一个侧面的概率为 $\frac{4 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$ ，

所以小明可以同时看到金字塔两个侧面的概率为 $\frac{1}{3}$ 。故选 A。

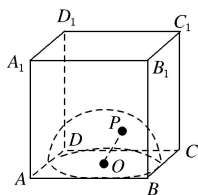


【例 4】在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 O 为底面 ABCD 的中心，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内随机取一点 P，则点 P 到点 O 的距离大于 1 的概率为_____。

【答案】 $1 - \frac{\pi}{12}$

【解析】如图，与点 O 距离等于 1 的点的轨迹是一个半球面，其体积 $V_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 1^3 = \frac{2\pi}{3}$ 。事件“点 P 与点 O 距离大于 1 的概率”对应的区域体积为 $2^3 - \frac{2\pi}{3}$ ，根据几何概型概率公式得，点 P 与点 O 距离大于 1 的概率 $P =$

$$\frac{2^3 - \frac{2\pi}{3}}{2^3} = 1 - \frac{\pi}{12}。$$



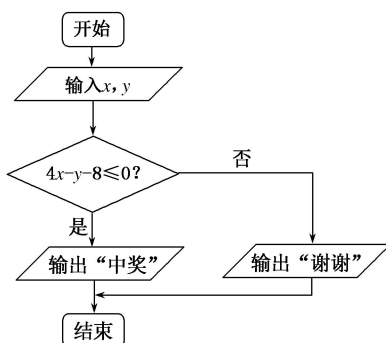
【例 5】某市中学生田径运动会总分获得冠、亚、季军的代表队人数情况如下表，大会组委会为使颁奖仪式有序进行，气氛活跃，在颁奖过程中穿插抽奖活动。并用分层抽样的方法从三个代表队中共抽取 16 人在前排就坐，其中亚军队有 5 人。

名次 \ 性别	冠军队	亚军队	季军队
男生	30	30	
女生	30	20	30

(1) 求季军队的男运动员人数。

(2) 从前排就坐的亚军队 5 人(3 男 2 女)中随机抽取 2 人上台领奖，请求出有女生上台领奖的概率。

(3) 抽奖活动中，运动员通过操作按键，使电脑自动产生 $[0,4]$ 内的两个均匀随机数 x, y ，随后电脑自动运行如图所示的程序框图的相应程序。若电脑显示“中奖”，则运动员获相应奖品；若电脑显示“谢谢”，则不中奖。求运动员获得奖品的概率。



【解析】(1) 设代表队共有 n 人，则 $\frac{5}{16} = \frac{50}{n}$ ，所以 $n = 160$ ，

则季军队的男运动员人数为 $160 - (30 + 30 + 30 + 20 + 30) = 20$ 。

(2) 设男生为 a_1, a_2, a_3 ，女生为 b_1, b_2 ，随机抽取 2 人，包括的基本事件个数为 $C_5^2 = 10$ ，有女生上台领奖的基本事件为 $C_3^2 - C_3^2 = 10 - 3 = 7$ ，所以 $P(A) = \frac{7}{10}$ ，有女生上台领奖的概率为 $\frac{7}{10}$ 。

(3) 试验的全部结果所构成的区域为 $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ ，面积为 $S_\Omega = 4 \times 4 = 16$ ，

事件 A 表示运动员获得奖品，所构成的区域为 $A = \{(x, y) | 4x - y - 8 \leq 0, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ ，

面积为 $S_A = \frac{1}{2}(2+3) \times 4 = 10$ ，这是一个几何概型，所以 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{5}{8}$ 。即运动员获得奖品的概率为 $\frac{5}{8}$ 。

考查相互独立事件：

【例 1】某学校举行知识竞赛，第一轮选拔共设有 1,2,3 三个问题，每位参赛者按问题 1,2,3 的顺序作答，竞赛

规则如下:

①每位参赛者积分器的初始分均为 10 分, 答对问题 1,2,3 分别加 1 分, 2 分, 3 分, 答错任一题减 2 分;

②每回答一题, 积分器显示累计分数, 当累计分数小于 8 分时, 答题结束, 淘汰出局; 当累计分数大于或等于 12 分时, 答题结束, 进入下一轮; 当答完三题, 累计分数仍不足 12 分时, 答题结束, 淘汰出局.

已知甲同学回答 1,2,3 三个问题正确的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1)求甲同学能进入下一轮的概率;

(2)用 X 表示甲同学本轮答题结束时的累计分数, 求 X 的分布列.

【解析】(1)设事件 A 表示“甲同学问题 1 回答正确”, 事件 B 表示“甲同学问题 2 回答正确”, 事件 C 表示“甲同学问题 3 回答正确”, 依题意 $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$. 记“甲同学能进入下一轮”为事件 D , 则 $P(D)=$

$P(\overline{A} \overline{B} C + AB + \overline{A} BC) = P(\overline{A} \overline{B} C) + P(AB) + P(\overline{A} BC)$

$$= P(A)P(\overline{B})P(C) + P(A)P(B) + P(\overline{A})P(B)P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{24}.$$

(2) X 可能的取值是 6,7,8,12,13.

$$P(X=6)=P(\overline{A})=\frac{1}{4}, \quad P(X=7)=P(A)=\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=8)=P(B)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}, \quad P(X=12)=P(AC)=\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8},$$

$$P(X=13)=P(AB+BC)=P(AB)+P(BC)=\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	6	7	8	12	13
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$

【例 2】(2021·江苏南通期末) 习近平总书记在党的十九大工作报告中提出, 永远把人民美好生活的向往作为奋斗目标. 在这一号召下, 全国人民积极工作, 健康生活. 当前, “日行万步”正式成为健康生活的代名词. 某地一研究团队统计了该地区 1000 位居民的日行步数, 得到如下表格:

日行步数 (单位: 千步)	$[0,2]$	$(2,4]$	$(4,6]$	$(6,8]$	$(8,10]$	$(10,12]$	$(12,14]$
人数	20	60	170	200	300	200	50

(1) 为研究日行步数与居民年龄的关系, 以日行步数是否超过 8 千步为标准进行分层抽样, 从上述 1000 位居民中抽取 200 人, 得到如下列联表, 请将列联表补充完整, 并根据列联表判断是否有 95% 的把握认为日行步数与居民年龄超过 40 岁有关;

	日行步数 ≤ 8 千步	日行步数 > 8 千步	总计
40 岁以上			100
40 岁以下 (含 40 岁)	50		
总计			200

(2) 以这 1000 位居民日行步数超过 8 千步的频率, 代替该地区 1 位居民日行步数超过 8 千的概率, 每位居民日行步数是否超过 8 千相互独立. 为了深入研究, 该研究团队随机调查了 20 位居民, 其中日行步数超过 8 千的最有可能 (即概率最大) 是多少位居民?

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

【解析】(1) 1000 人中, 步数不超过 8 千步的有 $20+60+170+200=450$ 人, 超过 8 千步有 550 人, 按分层抽样, 抽取的人数中不超过 8 千步的有 90 人, 超过 8 千步的有 110 人, 列联表如下:

	日行步数 ≤ 8 千步	日行步数 > 8 千步	总计
40 岁以上	40	60	100
40 岁以下 (含 40 岁)	50	50	100
总计	90	110	200

$$\therefore K^2 = \frac{200 \times (40 \times 50 - 50 \times 60)^2}{100 \times 100 \times 90 \times 110} = 2.02 < 3.841, \text{ 故没有 95\% 的把握认为日行步数与居民年龄超过 40 岁有关.}$$

$$(2) \text{ 每位居民步数超过 8 千的概率为 } \frac{550}{1000} = \frac{11}{20},$$

设步数超过 8 千的最有可能是 x 位居民,

$$\therefore \begin{cases} C_{20}^x \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^{20-x} \geq C_{20}^{x-1} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^{21-x} \Rightarrow x \leq \frac{231}{20} \\ C_{20}^x \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^{20-x} \geq C_{20}^{x+1} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^{19-x} \Rightarrow x \geq \frac{211}{20} \end{cases}, \therefore \frac{211}{20} \leq x \leq \frac{231}{20}, \because x \in \mathbf{Z}, \therefore x = 11,$$

即最有可能是11位居民.

【名师点睛】关键点睛：解本题第二问概率最大的问题时，利用二项分布求随机变量 ξ 在第 $\xi = k$ 的概率最

大时，可根据 $\begin{cases} P(\xi = k) \geq P(\xi = k-1) \\ P(\xi = k) \geq P(\xi = k+1) \end{cases}$ 列不等式组求解.

考查离散型随机变量分布列：

【例1】(2021·浙江绍兴期末) 设 $a > 0$ ，若随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	-1	0	2
P	a	2a	3a

则下列方差值中最大的是 ()

- A. $D(\xi)$ B. $D(|\xi|)$ C. $D(2\xi - 1)$ D. $D(2|\xi| + 1)$

【答案】C

【解析】由题意 $a + 2a + 3a = 1$ ， $a = \frac{1}{6}$ ，

$$E(\xi) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \quad E(|\xi|) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6},$$

$$D(\xi) = \frac{1}{6} \times (-1 - \frac{5}{6})^2 + \frac{1}{3} \times (0 - \frac{5}{6})^2 + \frac{1}{2} \times (2 - \frac{5}{6})^2 = \frac{53}{36},$$

$$D(|\xi|) = \frac{1}{6} \times (1 - \frac{7}{6})^2 + \frac{1}{3} \times (0 - \frac{7}{6})^2 + \frac{1}{2} \times (2 - \frac{7}{6})^2 = \frac{29}{36}.$$

$$D(\xi) > 1 > D(|\xi|), \quad D(2\xi - 1) = 4 \times \frac{53}{36} = \frac{53}{9}, \quad D(2|\xi| + 1) = 4 \times \frac{29}{36} = \frac{29}{9}.$$

其中 $D(2\xi - 1)$ 最大. 故选 C.

【名师点睛】方法点睛：求随机变量的期望和方差的基本方法如下：

(1) 已知随机变量的分布列，直接利用期望和方差公式直接求解；

(2) 已知随机变量 X 的期望、方差, 求 $aX+b(a, b \in R)$ 的期望与方差, 利用期望和方差的性质

($E(aX+b)=aE(X)+b$, $D(aX+b)=a^2D(X)$) 进行计算;

(3) 若能分析出所给的随机变量服从常用的分布 (如: 两点分布、二项分布等), 可直接利用常用分布列的期望和方差公式进行计算.

【例 2】 某市 A, B 两所中学的学生组队参加辩论赛, A 中学推荐了 3 名男生, 2 名女生, B 中学推荐了 3 名男生, 4 名女生, 两校推荐的学生一起参加集训, 由于集训后队员的水平相当, 从参加集训的男生中随机抽取 3 人, 女生中随机抽取 3 人组成代表队.

(1) 求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率;

(2) 某场比赛前, 从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛, 设 X 表示参赛的男生人数, 求 X 得分布列和数学期望.

【解析】 (1) 由题意, 参加集训的男、女生各有 6 名, 参赛学生全从 B 中抽取 (等价于 A 中学没有学生入选

代表队) 的概率为 $\frac{C_3^3 C_4^3}{C_6^3 C_6^3} = \frac{1}{100}$. 因此, A 中学至少 1 名学生入选的概率为 $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

(2) 根据题意, X 的可能取值为 1, 2, 3.

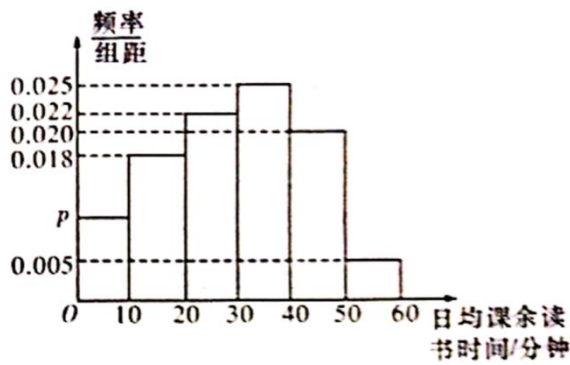
$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^3}{C_6^4} = \frac{1}{5}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^2}{C_6^4} = \frac{3}{5}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3 C_3^1}{C_6^4} = \frac{1}{5},$$

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

因此, X 的期望为 $E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3)$, $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$.

【例 3】 (2021 广西南宁模拟 (理)) 某地区为了解学生课余时间的读书情况, 随机抽取了 n 名学生进行调查, 将调查得到的学生日均课余读书时间分成 $[0,10)$, $[10,20)$, $[20,30)$, $[30,40)$, $[40,50)$, $[50,60]$ 六组, 绘制成如图所示的频率分布直方图, 将日均课余读书时间不低于 40 分钟的学生称为“读书之星”, 日均课余读书时间低于 40 分钟的学生称为“非读书之星”已知抽取的样本中日均课余读书时间低于 10 分钟的有 10 人.



- (1) 求 p 和 n 的值;
- (2) 根据已知条件和下面表中两个数据完成下面的 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 以上的把握认为“读书之星”与性别有关?

	非读书之星	读书之星	总计
男			
女		10	55
总计			

- (3) 将本次调查所得到有关事件发生的频率视为其发生的概率, 现从该地区大量学生中, 随机抽取 20 名学生参加读书与文学素养的研讨会, 记被抽取的“读书之星”人数为随机变量 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0. 10	0. 05	0. 025	0. 010	0. 005	0. 001
k_0	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635	7. 879	10. 828

【解析】(1) $(0.005 + p + 0.018 + 0.020 + 0.022 + 0.025) \times 10 = 1$, 解得: $p = 0.01$, 所以 $n = \frac{10}{0.1} = 100$.

(2) 因为 $n = 100$, 所以“读书之星”有 $100 \times 0.25 = 25$,

从而 2×2 列联表如下图所示:

	非读书之星	读书之星	总计
男	30	15	45

女	45	10	55
总计	75	25	100

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算得 $K^2 = \frac{100 \times (30 \times 10 - 15 \times 45)^2}{45 \times 55 \times 75 \times 25} \approx 3.030$,

因为 $3.030 < 3.841$, 所以没有 95% 以上的把握认为“读书之星”与性别有关.

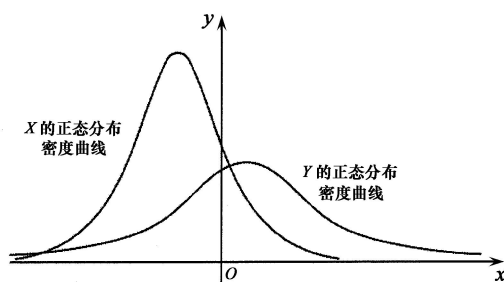
(3) 将频率视为概率, 即从该地区学生中抽取一名学生是“读书之星”的概率为 $\frac{1}{4}$.

由题意可知 $X \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $E(X) = 20 \times \frac{1}{4} = 5$ (人).

【名师点睛】此题考查频率分布直方图, 考查频率的求法, 考查离散型数学期望的求法, 考查二项分布, 考查分析问题的能力, 属于中档题.

考查正态分布:

【例 1】设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示. 下列结论中正确的是



A. $P(Y \geq \mu_2) \geq P(Y \geq \mu_1)$

B. $P(X \leq \sigma_2) \leq P(X \leq \sigma_1)$

C. 对任意正数 t , $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

D. 对任意正数 t , $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$

【答案】C

【解析】由正态分布密度曲线的性质可知, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的密度曲线分别关于直线 $x = \mu_1$, $x = \mu_2$ 对称, 因此结合题中所给图象可得, $\mu_1 < \mu_2$, 所以 $P(Y \geq \mu_2) < P(Y \geq \mu_1)$, 故 A 错误. 又

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的密度曲线较 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的密度曲线“瘦高”, 所以 $\sigma_1 < \sigma_2$, 所以 $P(X \leq \sigma_2) > P(X \leq \sigma_1)$, B 错误. 对任意正数 t , $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$, $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$, C 正确, D 错误.

【例 2】(2021·湖北宜昌期末)某校一次高三年级数学检测, 经抽样分析, 成绩 ξ 占近似服从正态分布 $N(95, \sigma^2)$,

且 $P(91 < \xi \leq 95) = 0.25$. 若该校有 700 人参加此次检测, 估计该校此次检测数学成绩不低于 99 分的人数为 ()

A. 100 B. 125 C. 150 D. 175

【答案】D

【解析】由题意, 成绩 X 近似服从正态分布 $N(95, \sigma^2)$, 则正态分布曲线的对称轴为 $X = 95$,

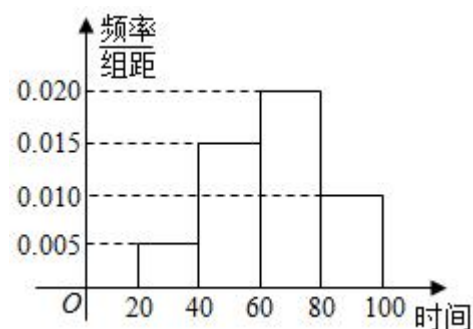
又由 $P(91 < \xi \leq 95) = 0.25$, 根据正态分布曲线的对称性, 可得

$$P(X \geq 99) = \frac{1}{2} \times [1 - 2 \times P(91 < X \leq 95)] = \frac{1}{2} (1 - 2 \times 0.25) = 0.25,$$

所以该市某校有 700 人中, 估计该校数学成绩不低于 99 分的人数为 $700 \times 0.25 = 175$ 人, 故选 D.

【名师点睛】关键点点睛: 该题主要考查了正态分布曲线的性质的应用, 其中解答中熟练应用正态分布曲线的对称性, 求得成绩不低于 99 分的概率是解答的关键.

【例 3】50. (2021·江苏南通期末) 国庆节期间, 我国高速公路继续执行“节假日高速公路免费政策”. 某路桥公司为掌握国庆节期间车辆出行的高峰情况, 在某高速公路收费站点记录了 3 日上午 9:20~10:40 这一时间段内通过的车辆数, 统计发现这一时间段内共有 600 辆车通过该收费站点, 它们通过该收费站点的时刻的频率分布直方图如下图所示, 其中时间段 9:20~9:40 记作 $[20, 40)$ 、9:40~10:00 记作 $[40, 60)$, 10:00~10:20 记作 $[60, 80)$, 10:20~10:40 记作 $[80, 100)$, 例如: 10 点 04 分, 记作时刻 64.



(I) 估计这 600 辆车在 9:20~10:40 时间内通过该收费站点的时刻的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

(II) 为了对数据进行分析, 现采用分层抽样的方法从这 600 辆车中抽取 10 辆, 再从这 10 辆车随机抽取 4 辆, 设抽到的 4 辆车中, 在 9:20~10:00 之间通过的车辆数为 X , 求 X 的分布列;

(III) 根据大数据分析, 车辆在每天通过该收费站点的时刻 T 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 可用 3 日数据中的 600 辆车在 9:20~10:40 之间通过该收费站点的时刻的平均值近似代替, σ^2 用样本的方差近似代替 (同

一组中的数据用该组区间的中点值代表). 假如 4 日全天共有 1000 辆车通过该收费站点, 估计在 9: 46~10: 40 之间通过的车辆数 (结果保留到整数).

附: 若随机变量 T 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < T \leq \mu + \sigma) = 0.6827$,

$$P(\mu - 2\sigma < T \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545, \quad P(\mu - 3\sigma < T \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973.$$

【解析】(I) 这 600 辆车在 9: 20~10: 40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值为:

$$(30 \times 0.005 + 50 \times 0.015 + 70 \times 0.020 + 90 \times 0.010) \times 20 = 64, \text{ 即 } 10: 04$$

(II) 由频率分布直方图和分层抽样的方法可知, 抽取的 10 辆车中, 在 10: 00 前通过的车辆数就是位于时间分组中在 20, 60 这一区间内的车辆数, 即 $(0.005 + 0.015) \times 20 \times 10 = 4$,

所以 X 的可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}, \quad P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{35}, \quad P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

(III) 由 (1) 得 $\mu = 64$, $\sigma_{\text{车辆}}^2 = (30 - 64)^2 \times 0.1 + (50 - 64)^2 \times 0.3 + (70 - 64)^2 \times 0.4 + (90 - 64)^2 \times 0.2 = 324$,

所以 $\sigma = 18$,

估计在 9: 46~10: 40 之间通过的车辆数也就是在 46, 100 通过的车辆数, 由 $T \sim N(64, 18^2)$, 得

$$P(64 - 18 \leq T \leq 64 + 2 \times 18) = \frac{P(\mu - \sigma < T \leq \mu + \sigma)}{2} + \frac{P(\mu - 2\sigma < T \leq \mu + 2\sigma)}{2} = 0.8186,$$

所以估计在 9: 46~10: 40 之间通过的车辆数为 $1000 \times 0.8186 \approx 819$.

【名师点睛】方法点睛: (1) 求解离散型随机变量 X 的分布列的步骤: ①理解 X 的意义, 写出 X 可能取的全部值; ②求 X 取每个值的概率; ③写出 X 的分布列. (2) 求离散型随机变量的分布列的关键是求随机变量所取值对应的概率, 在求解时, 要注意应用计数原理、古典概型等知识.

考查条件概率:

【例 1】(2021·黑龙江哈尔滨三中高三月考(理)) 已知甲在上班途中要经过两个路口, 在第一个路口遇到红灯的概率为 0.5, 两个路口连续遇到红灯的概率为 0.3, 则甲在第一个路口遇到红灯的条件下, 第二个路口遇到红灯的概率为_____.

【答案】0.6

【解析】设事件 A: 第一个路口遇到红灯, 事件 B: 第二个路口遇到红灯, 则 $P(A) = 0.5$, $P(AB) = 0.3$,

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.6, \text{ 故答案为: } 0.6.$$

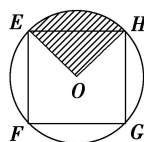
【例 2】如图, $EFGH$ 是以 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内接正方形. 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用 A 表示事件“豆子落在正方形 $EFGH$ 内”, B 表示事件“豆子落在扇形 OHE (阴影部分) 内”, 则 $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】由题意可得, 事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{S_{\text{正方形} EFGH}}{S_{\text{圆} O}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\pi \times 1^2} = \frac{2}{\pi}$.

事件 AB 表示“豆子落在 $\triangle EOH$ 内”, 则 $P(AB) = \frac{S_{\triangle EOH}}{S_{\text{圆} O}} = \frac{\frac{1}{2} \times 1^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{2\pi}$.

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2\pi}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{4}.$$



讲题型

超几何分布与二项分布

二项分布与超几何分布的辨别方法

超几何分布的抽取是不放回抽取, 各次抽取不独立, 二项分布的抽取是独立的, 各次抽取相互独立。当超几何分布所对应的总体数量很大时可以近似地看作二项分布。

【例】写出下列离散型随机变量的分布列, 并指出其中服从二项分布的是哪些? 服从超几何分布的是哪些?

(1) X_1 表示 n 次重复抛掷 1 枚骰子出现点数是 3 的倍数的次数。

(2) X_2 表示连续抛掷 2 枚骰子, 所得的 2 个骰子的点数之和。

(3) 有一批产品共有 N 件, 其中次品有 M 件 ($N > M > 0$), 采用有放回抽取方法抽取 n 次 ($n > N$), 抽出的次品件数为 X_3 。

(4) 有一批产品共有 N 件, 其中 M 件为次品, 采用不放回抽取方法抽 n 件, 出现次品的件数为 X_4 ($N - M > n > 0$)。

【解】 (1) X_1 的分布列为

X_1	0	1	2	...	n

P	$C_n^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$C_n^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$C_n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$

X_1 服从二项分布, 即 $X_1 \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 。

(2) X_2 的分布列为

X_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(3) X_3 的分布列为

X_3	0	1	2	$\cdots$	n
P	$\left[1 - \frac{M}{N}\right]^n$	$C_n^1 \frac{M}{N} \left[1 - \frac{M}{N}\right]^{n-1}$	$C_n^2 \left(\frac{M}{N}\right)^2 \left[1 - \frac{M}{N}\right]^{n-2}$	$\cdots$	$\left(\frac{M}{N}\right)^n$

X_3 服从二项分布, 即 $X_3 \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$ 。

(4) X_4 的分布列为

X_4	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$\frac{C_{N-M}^0 C_N^0}{C_N^0}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^n}{C_N^n}$

X_4 服从超几何分布。

【例】从某批产品中, 有放回地抽取产品两次, 每次随机抽取 1 件。假设事件 A : “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”, 其概率 $P(A)=0.96$ 。

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p 。

(2) 若该批产品共 100 件, 从中无放回地抽取 2 件, ξ 表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求 ξ 的分布列。

【解析】(1) 记 A_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”, A_1 表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”, 则 A_0, A_1 互斥, 且 $A=A_0 \cup A_1$, 故 $P(A)=P(A_0 \cup A_1)=P(A_0)+P(A_1)=(1-p)^2+C_2^1 p(1-p)=1-p^2$, 即 $0.96=1-p^2$, 解得 $p=0.2$ 或 $p=-0.2$ (舍去), 故从该批产品中任取 1 件是二等品的概率为 0.2。

(2) 该批产品共 100 件, 由(1)知其二等品有 $100 \times 0.2=20$ (件), ξ 的可能取值为 0, 1, 2。

$$\text{故 } P(\xi=0)=\frac{C_{80}^2}{C_{100}^2}=\frac{316}{495}, P(\xi=1)=\frac{C_{80}^1 C_{20}^1}{C_{100}^2}=\frac{32}{99}, P(\xi=2)=\frac{C_{20}^2}{C_{100}^2}=\frac{19}{495}.$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{32}{99}$	$\frac{19}{495}$

【例】甲、乙两支排球队进行比赛, 约定先胜 3 局者获得比赛的胜利, 比赛随即结束。除第五局甲队获胜的概率是 $\frac{1}{2}$ 外, 其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\frac{2}{3}$ 。假设各局比赛结果相互独立。

(1) 分别求甲队以 3:0, 3:1, 3:2 胜利的概率。

(2)若比赛结果为 3:0 或 3:1, 则胜利方得 3 分, 对方得 0 分; 若比赛结果为 3:2, 则胜利方得 2 分, 对方得 1 分。求乙队得分 X 的分布列。

【解析】(1)设“甲队以 3:0, 3:1, 3:2 胜利”分别为事件 A, B, C, 则 $P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$,

$$P(B) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}, \quad P(C) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

(2) X 的可能的取值为 0, 1, 2, 3。则 $P(X=0) = P(A) + P(B) = \frac{16}{27}$, $P(X=1) = P(C) = \frac{4}{27}$,

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}, \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{16}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$

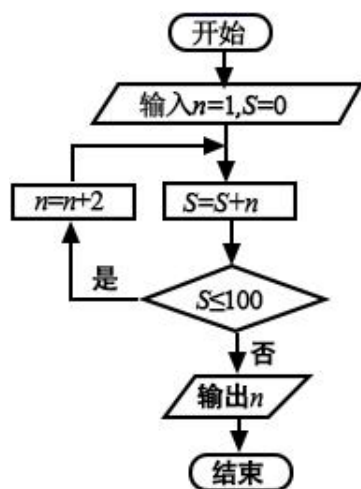
小结: 利用独立重复试验概率公式可以简化求概率的过程, 但需要注意检查该概率模型是否满足公式 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 的三个条件: (1)在一次试验中某事件 A 发生的概率是一个常数 p ; (2) n 次试验不仅是在完全相同的情况下进行的重复试验, 而且各次试验的结果是相互独立的; (3)该公式表示 n 次试验中事件 A 恰好发生了 k 次的概率。

专题 13 算法、推理与证明、复数

讲高考

1. 【高考全国 I 卷文数 9】执行下面的程序框图, 则输出的 $n =$

()



A. 17

B. 19

C. 21

D. 23

【答案】C

【思路导引】根据程序框图的算法功能可知，要计算满足 $1+3+5+\cdots+n > 100$ 的最小正奇数 n ，根据等差数列求和公式即可求出。

【解析】依据程序框图的算法功能可知，输出的 n 是满足 $1+3+5+\cdots+n > 100$ 的最小正奇数，

$$\because 1+3+5+\cdots+n = \frac{(1+n) \times \left(\frac{n-1}{2} + 1\right)}{2} = \frac{1}{4}(n+1)^2 > 100, \text{ 解得 } n > 19, \therefore \text{输出的 } n = 21, \text{ 故选 C.}$$

【专家解读】本题考查了程序框图的算法功能的理解，以及等差数列前 n 项和公式的应用，考查数学运算学科素养。解题关键是正确理解程序框图中的循环结构。

2. 【高考全国 I 卷理数 1】若 $z = 1+i$ ，则 $|z^2 - 2z| =$ ()

A. 0

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

【答案】D**【思路导引】**

由题意首先求得 $z^2 - 2z$ 的值，然后计算其模即可。

【解析】由题意可得： $z^2 = (1+i)^2 = 2i$ ，则 $z^2 - 2z = 2i - 2(1+i) = -2$ ，故 $|z^2 - 2z| = |-2| = 2$ ，故选 D。

【专家解读】本题考查了复数的运算法则和复数的模的计算，考查数学运算学科素养。

3. 【高考全国 II 卷文数 2】 $(1-i)^4 =$ ()

A. -4

B. 4

C. $-4i$ D. $4i$ **【答案】A**

【思路导引】根据指数幂的运算性质，结合复数的乘方运算性质进行求解即可。

【解析】 $(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = -4$. 故选 A.

【专家解读】本题考查了复数的乘方运算性质，考查数学运算学科素养.

4. 【高考全国III卷理数2】复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是 ()

- A. $-\frac{3}{10}$ B. $-\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{3}{10}$

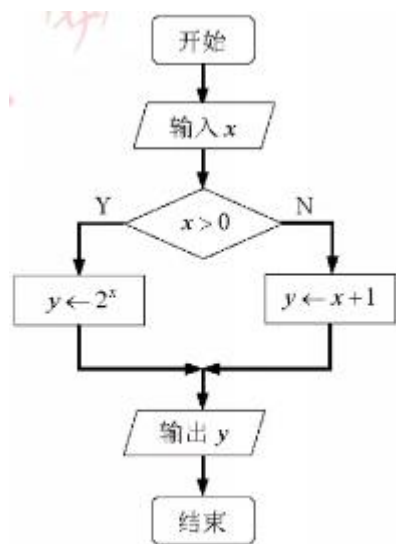
【答案】D

【思路导引】利用复数的除法运算求出 z 即可.

【解析】 $\because z = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$, $\therefore$ 复数 $z = \frac{1}{1-3i}$ 的虚部为 $\frac{3}{10}$, 故选 D.

【专家解读】本题考查了复数的概念，考查复数的除法运算，考查数学运算学科素养.

5. 【高考江苏卷5】下图是一个算法流程图，若输出 y 的值为 -2 ，则输入 x 的值是_____.



(第5题)

【答案】-3

【解析】由题可知 $y = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}$, 当 $y = -2$ 时, 得 $x+1 = -2$, 解得 $x = -3$.

【专家解读】本题考查了程序框图的算法功能的理解，考查数学运算学科素养. 解题关键是理解程序框图中的条件结构. 识别、运行程序框图和完善程序框图的思路:

- (1)要明确程序框图的顺序结构、条件结构和循环结构.
- (2)要识别、运行程序框图，理解框图所解决的实际问题.
- (3)按照题目的要求完成解答并验证.

6. 【高考全国 II 卷理数 15】设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 2$, $z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i$, 则 $|z_1 - z_2| =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【思路导引】 令 $z_1 = 2\cos\theta + 2\sin\theta \cdot i$, $z_2 = 2\cos\alpha + 2\sin\alpha \cdot i$, 根据复数的相等可求得

$\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, 代入复数模长的公式中即可得到结果.

【解析】 $\because |z_1| = |z_2| = 2$, 可设 $z_1 = 2\cos\theta + 2\sin\theta \cdot i$, $z_2 = 2\cos\alpha + 2\sin\alpha \cdot i$,

$\therefore z_1 + z_2 = 2(\cos\theta + \cos\alpha) + 2(\sin\theta + \sin\alpha) \cdot i = \sqrt{3} + i$,

$\therefore \begin{cases} 2(\cos\theta + \cos\alpha) = \sqrt{3} \\ 2(\sin\theta + \sin\alpha) = 1 \end{cases}$, 两式平方作和得: $4(2 + 2\cos\theta\cos\alpha + 2\sin\theta\sin\alpha) = 4$,

化简得: $\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore |z_1 - z_2| = |2(\cos\theta - \cos\alpha) + 2(\sin\theta - \sin\alpha) \cdot i|$

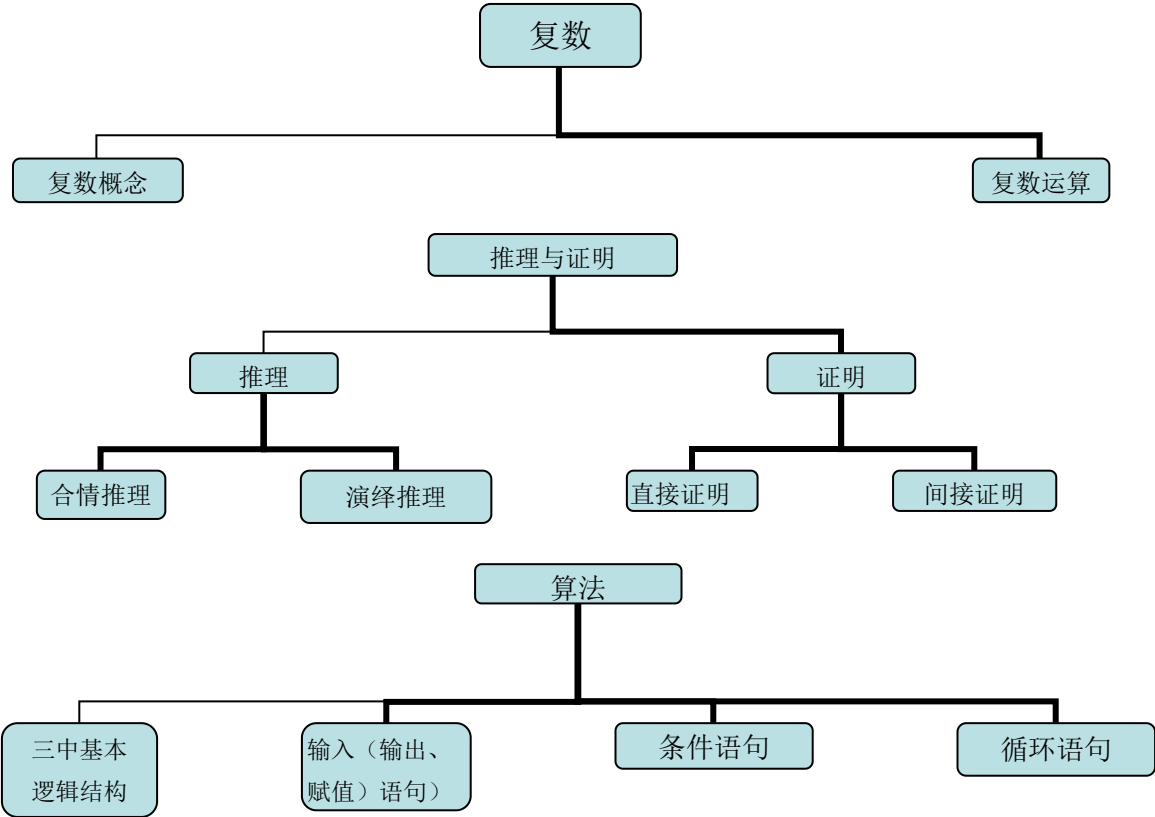
$= \sqrt{4(\cos\theta - \cos\alpha)^2 + 4(\sin\theta - \sin\alpha)^2} = \sqrt{8 - 8(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)} = \sqrt{8 + 4} = 2\sqrt{3}$.

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【专家解读】 本题考查了复数的应用, 考查复数的加法、减法运算, 考查复数模长的计算, 考查数学运算、数学建模等学科素养. 解题关键是正确正确计算复数的模长, 理解复数相等的充要条件.

讲考向

一、考向分析:



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
复数	1. 利用复数的四则运算求复数的一般思路: (1)复数的乘法运算满足多项式的乘法法则, 利用此法则运算后将实部与虚部分别写出即可. (2)复数的除法运算主要是利用分子、分母同乘分母的共轭复数进行运算化简. (3)利用复数的相关概念解题时, 通常是设出复数或利用已知联立方程求解. 2. 判断复数对应的点在复平面内的位置的方法:首先将复数化成 $a+bi(a, b \in \mathbb{R})$ 的形式, 其次根据实部 a 和虚部 b 的符号来确定点所在的象限. 3. (1)与共轭复数有关的问题一般都要先设出复数的代数形式, 再用待定系数法解决. (2)与复数的概念有关的问题, 一般是先化简, 把复数的非代数形式化为代数形式. 4. 复数的代数运算多用于次数较低的运算, 但应用 i、ω 的性质可简化运算. 注意下面结论的灵活运用: (1)$(1 \pm i)^2 = \pm 2i$; (2)$\frac{1+i}{1-i} = i$, $\frac{1-i}{1+i} = -i$; (3)$\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = 1$, 其中 $\omega = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}i$. (4)$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0(n \in \mathbb{N})$.
	1. 执行循环结构:首先, 要分清是先执行循环体, 再判断条件, 还是先判断条件, 再执行循环体; 其次, 注意控制循环的变量是什么, 何时退出循环; 最后, 要清楚循环体内的程序是

算法	什么，是如何变化的. 2. 解答补全问题时，首先，根据输出的结果，计算出需要循环的次数；然后，计算出最后一次循环变量对应的数值；最后，通过比较得出结论. 特别要注意对问题的转化，问题与框图的表示的相互转化. 3. 解答有关程序框图的问题，要读懂程序框图，熟练掌握程序框图的三种基本结构. 注意逐步执行，并且将每一次执行的结果都写出来，要注意在哪一步结束循环以防止运行程序不彻底. 循环结构常常用在一些有规律的科学计算中，如累加求和、累乘求积、多次输入等. 4. 程序框图中只要有了循环结构，就一定会涉及条件结构和顺序结构. 对于循环结构，要注意当型与直到型的区别，搞清进入或终止的循环条件、循环次数是做题的关键.
推理与证明	1. 运用归纳推理得出一般结论时，要注意从等式、不等式的项数、次数、系数等多个方面进行综合分析，归纳发现其一般结论. 2. 若已给出的式子较少，规律不明显，则可多写出几个式子，从中发现一般结论. 3. 进行类比推理时，首先要充分考虑已知对象性质的推理过程，然后类比推导类比对象的性质. 4. 归纳推理的关键是找规律，类比推理的关键是看共性. 5. 区分两种合情推理的思维过程: (1)归纳推理是由部分到整体、由特殊到一般的推理，归纳推理的思维过程: 实验、观察→概括、推广→猜测一般性结论 (2)类比推理的思维过程:实验、观察→联想、类推→猜测新的结论 在进行类比推理时，不仅要注意形式的类比，还要注意方法的类比. 主要有以下两点:(1)找两类对象的对应元素，如:三角形对应三棱锥，圆对应球，面积对应体积等等;(2)找对应元素的对应关系，如:两条边(直线)垂直对应线面垂直或面面垂直，边相等对应面积相等.

考查复数:

例 1. (2021·湖北新高考演练) 设复数 z 满足 $z+i(1-i) \in R$, 则 z 的虚部为 ()

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

【答案】B

【解析】 设复数 $z = a + bi, (a, b \in R)$, 则 $z + i(1-i) = a + 1 + (b+1)i$, 因为 $z + i(1-i) \in R$, 可得 $b+1=0$, 解得 $b=-1$, 所以复数 z 的虚部为 -1 . 故选 B.

【名师点睛】 本题考查复数的乘除法的运算及共轭复数的概念，其中正确求出复数 z 是解题的关键，对于复数

的运算, 解题时一定要按照相关的运算法则求解, 特别是在乘除运算中一定不要忘了 $i^2 = -1$.

例 2. (2021·陕西咸阳市·高三一模(理)) 设复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$, 那么在复平面内复数 $3z-1$ 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】 $\because z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$, $\therefore 3z-1 = -1-3i$, 因此, 复数 $3z-1$ 在复平面内对应的点位于第三象限. 故选 C.

例 3. 知复数 z 满足 $(3+i)z = 10i$ (其中 i 是虚数单位, 满足 $i^2 = -1$), 则复数 z 的共轭复数是 ()

- A. $-1+3i$ B. $1-3i$ C. $1+3i$ D. $-1-3i$

【答案】B

【解析】因为 $z = \frac{10i}{3+i} = \frac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10+30i}{10} = 1+3i$, $\therefore \bar{z} = 1-3i$, 选 B.

例 4. 已知 i 为虚数单位, $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数, 若 $z+2\bar{z} = 9-i$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于 ()

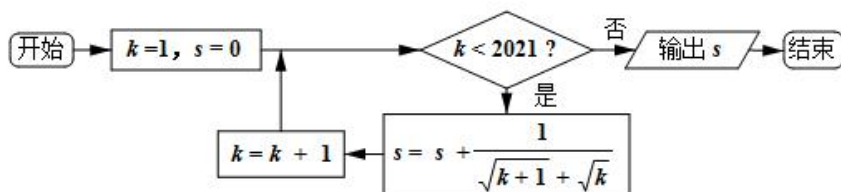
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】设 $z = a+bi, a, b \in \mathbb{R}$, 由 $z+2\bar{z} = 9-i$, 得 $(a+bi) + 2(a-bi) = 9-i$, 即 $3a-bi = 9-i$, 则 $a=3, b=1$, 即 $z=3+i$ 在复平面内对应的点 $(3,1)$ 位于第一象限. 故选 A.

考查算法:

1. (2021·安徽马鞍山市·高三一模(文)) 执行如图所示的程序框图, 则输出的 $s =$ ()



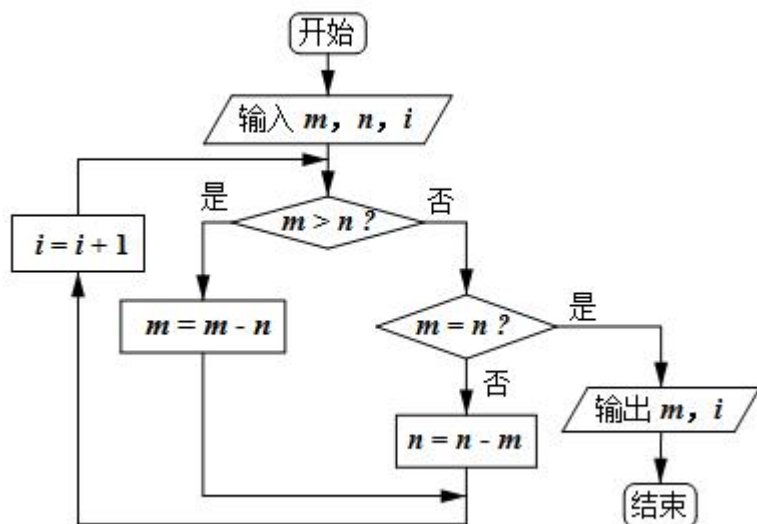
- A. $\sqrt{2020}-1$ B. $\sqrt{2021}-1$ C. $2\sqrt{2020}-1$ D. $2\sqrt{2021}-1$

【答案】B

【解析】由程序框图可知, 输出的 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}$

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2021} - \sqrt{2020} = \sqrt{2021} - 1. \text{ 故选 B.}$$

例 2. (2021·安徽六安市·高三一模(文))《九章算术》是中国古代的数学专著, 其中的“更相减损术”可以用来求两个数的最大公约数, 这是一个伟大创举. 其内容如下: “可半者半之, 不可半者, 副置分母、子之数, 以少减多, 更相减损, 求其等也, 以等数约之”. 下面的程序框图体现了该算法的主要过程, 若输入 $m = 168$, $n = 105$, $i = 1$ 时, 则输出的结果为 ()



- A. $m = 21$, $i = 4$ B. $m = 21$, $i = 5$
 C. $m = 23$, $i = 4$ D. $m = 23$, $i = 5$

【答案】B

【解析】按照程序框图运行程序, 输入: $m = 168$, $n = 105$, $i = 1$,

$m > n$, 则 $m = 63$, $n = 105$, $i = 2$;

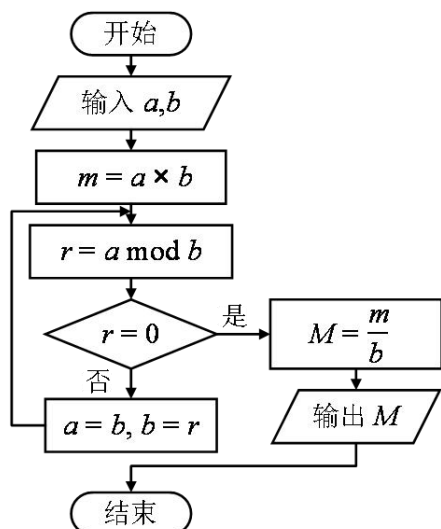
$m < n$, 则 $m = 63$, $n = 42$, $i = 3$;

$m > n$, 则 $m = 21$, $n = 42$, $i = 4$;

$m < n$, 则 $m = 21$, $n = 21$, $i = 5$;

$i = 5$ 满足 $m = n$, 输出 $m = 21$, $i = 5$. 故选 B.

例 3. (2021·陕西宝鸡市·高三一模(文))执行下边的程序框图(“ $a \bmod b$ ”是 a 除以 b 的余数), 如果输入 $a = 18$, $b = 12$, 则输出 M 的值等于 ()



A. 12

B. 18

C. 36

D. 72

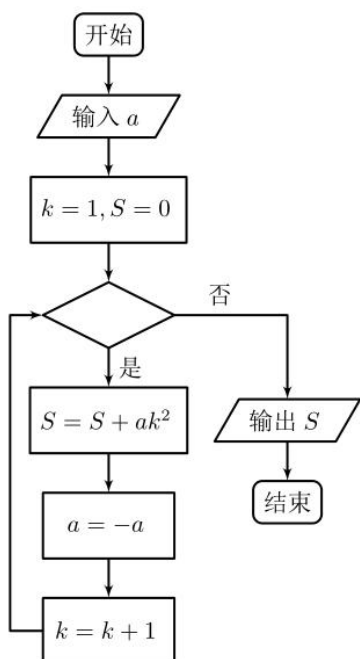
【答案】C

【解析】 $\because a=18, b=12, \therefore m=a \times b=18 \times 12$

第一次循环得： $r=a \bmod b=18 \bmod 12=6 \neq 0$ ，所以 $a=12, b=6$ ；

第二次循环得： $r=a \bmod b=12 \bmod 6=0$ ，所以跳出循环； $M=\frac{m}{b}=\frac{18 \times 12}{6}=36$ ，故选 C.

例 4. (2021·河南郑州市·高三一模(文)) 运行如图所示的程序框图，若输入的 a 值为 2 时，输出的 S 的值为 12，则判断框中可以填 ()


 A. $k < 3?$

 B. $k < 4?$

 C. $k < 5?$

 D. $k < 6?$

【答案】B

【解析】运行该程序：输入 $a=2$ ，

第一次循环： $S=0+2 \cdot 1^2=2$ ， $a=-2$ ， $k=1+1=2$ ；

第二次循环： $S=2-2 \cdot 2^2=-6$ ， $a=2$ ， $k=2+1=3$ ；

第三次循环： $S=-6+2 \cdot 3^2=12$ ， $a=-2$ ， $k=3+1=4$ ，

因为输出的 S 的值为 12，所以判断框中可以填 $k < 4$ ，故选 B.

考查推理与证明

例 1. (2021·陕西西安市·高三一模(文)) 天干地支纪年法(简称干支纪年法)是中国历法上自古以来就一直使用的纪年方法. 天干有十, 即: 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸; 地支有十二, 即: 子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥. 干支纪年法中, 天干地支对应的规律如表:

天干	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	甲	乙	丙	...
地支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥	子	...
天干地支纪年	甲子年	乙丑年	丙寅年	丁卯年	戊辰年	己巳年	庚午年	辛未年	壬申年	癸酉年	甲戌年	乙亥年	丙子年	...

2049 年是新中国成立 100 周年. 这一百年, 中国逐步实现中华民族的伟大复兴. 使用干支纪年法, 2049 年是己巳年, 则 2058 年是 () 年.

- A. 己巳 B. 甲申 C. 戊寅 D. 丙戌

【答案】C

【解析】列表如下:

天干	地支	天干地支纪年
甲	子	甲子年
乙	丑	乙丑年
丙	寅	丙寅年

丁	卯	丁卯年
戊	辰	戊辰年
己	巳	己巳年
庚	午	庚午年
辛	未	辛未年
壬	申	壬申年
癸	酉	癸酉年
甲	戌	甲戌年
乙	亥	乙亥年
丙	子	丙子年
丁	丑	丁丑年
戊	寅	戊寅年
己	卯	己卯年
庚	辰	庚辰年
辛	巳	辛巳年
壬	午	壬午年
甲	未	甲未年
乙	申	乙申年
丙	酉	丙酉年
丁	戌	丁戌年
戊	亥	戊亥年

2049 年是己巳年，往后数 9 年，得 2058 年是戊寅年，故选 C。

例 2. 甲、乙、丙、丁四个人参加某项竞赛，四人在成绩公布前做出如下预测：

甲说：获奖者在乙丙丁三人中；乙说：我不会获奖，丙获奖；丙说：甲和丁中的一人获奖；

丁说：乙猜测的是对的. 成绩公布后表明，四人中有两人的预测与结果相符，另外两人的预测与结果不相符. 已知俩人获奖，则获奖的是

- A. 甲和丁 B. 甲和丙
C. 乙和丙 D. 乙和丁

【答案】D

【解析】乙、丁的预测要么同时与结果相符，要么同时与结果不符，若乙、丁的预测成立，则甲、丙的预测不成立，可知矛盾，故乙、丁的预测不成立，从而获奖的是乙和丁，故选 D.

【名师点睛】本题考查了逻辑推理能力，假设法是解决此类问题常用的方法.

3. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in N^*$, b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等差中项.

(I) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2, n \in N^*$ ，求证： $\{c_n\}$ 是等差数列；

(II) 设 $a_1 = d, T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2, n \in N^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$.

【答案】(I) 详见解析 (II) 详见解析

【解析】

(I) 证明：由题意得 $b_n^2 = a_n a_{n+1}$ ，有 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} = 2da_{n+1}$ ，因此

$c_{n+1} - c_n = 2d(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2d^2$ ，所以 $\{c_n\}$ 是等差数列.

(II) 证明： $T_n = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \dots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2)$

$$= 2d(a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = 2d \cdot \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} = 2d^2 n(n+1)$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} = \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2d^2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{2d^2}.$$

讲题型

反证法

反证法

假设原命题不成立，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设错误，从而证明了原命题成立，这样的证明方法叫作反证法.

例 1. (2021 梅河口市第五中学高三月考(理)) 甲、乙、丙三人尝试在下面的表格中填入第二排的数字, 使得第一个数字表明这一排中 0 的数量, 第二个数字表明这一排中 1 的数量, 第三个数字表明这一排中 2 的数量, 依此类推, 最后一个数字表明这一排中 6 的数量.

0	1	2	3	4	5	6

甲说: “第七个数字一定是 0”;

乙说: “这些数字的和是 7, 所以第一个数字不能比 3 大”;

丙说: “这七个数字有且只有一种填法”

其中, 说法正确的是 ()

A. 甲

B. 乙

C. 甲 乙

D. 甲 乙 丙

【答案】D

【解析】由题意可知, 若第七个数字不是 0, 设第七个数字为 $n (n \neq 0)$, 则就要求第二排要有 n 个 6, 那就要在其他地方填上 6, 对应着要有 6 个该数字, 无法满足, 所以第七个数字是 0, 则甲说法正确; 第五个和第六个数字也如上述原因需填 0, 所以第四个数字不能填 0, 若是 0 则第一个数至少为 4, 需要在第二和第三个数字上填 4, 个数不够, 只能填 1, 若是填 2, 仍不成立, 所以最后答案仅为 3211000, 所以乙丙的说法正确, 所以说法正确的是甲 乙 丙. 故选 D.

【点睛】本题考查反证法的应用, 以及合情推理和演绎推理的应用, 考查学生逻辑推理能力, 属于基础题.

例 2. 用反证法证明命题“设 a, b 为实数, 则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根”时, 要做的假设是 ()

A. 方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根

B. 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有一个实根

C. 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有两个实根

D. 方程 $x^3+ax+b=0$ 恰好有两个实根

【答案】A

【解析】反证法中否定结论需全否定, “至少有一个”的否定为“一个也没有”.

例 3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1+\sqrt{2}$, $S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{S_n}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列.

【解析】(1)由已知得 $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} + 1, \\ 3a_1 + 3d = 9 + 3\sqrt{2}, \end{cases}$ 所以 $d=2$, 故 $a_n = 2n - 1 + \sqrt{2}$, $S_n = n(n + \sqrt{2})$.

(2)证明: 由(1), 得 $b_n = \frac{S_n}{n} = n + \sqrt{2}$.

假设数列 $\{b_n\}$ 中存在三项 b_p, b_q, b_r (p, q, r 互不相等) 成等比数列,

则 $b_q^2 = b_p b_r$, 即 $(q + \sqrt{2})^2 = (p + \sqrt{2})(r + \sqrt{2})$, 所以 $(q^2 - pr) + \sqrt{2}(2q - p - r) = 0$.

因为 $p, q, r \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\begin{cases} q^2 - pr = 0, \\ 2q - p - r = 0, \end{cases}$ 所以 $\left(\frac{p+r}{2}\right)^2 = pr$, $(p-r)^2 = 0$.

所以 $p=r$, 这与 $p \neq r$ 矛盾, 所以数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列.

反证法证明问题的五个注意点

(1)分清问题的条件和结论;

(2)假设所要证的结论不成立, 而假设结论的反面成立(否定结论);

(3)从假设和条件出发, 经过正确的推理, 导出与已知条件、公理、定理、定义及明显成立的事实相矛盾或自相矛盾(推导矛盾);

(4)因为推理正确, 所以断定产生矛盾的原因是“假设”错误, 即结论的反面不成立, 从而证明了原结论成立(结论成立);

(5)应用反证法时, 当原命题的结论的反面有多种情况时, 要对结论的反面的每一种情况都进行讨论, 从而达到否定结论的目的.

专题 14 极坐标与参数方程、不等式选讲

讲高考

1. 【高考全国 I 卷文理数 21】

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^k t, \\ y = \sin^k t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴

建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho \cos \theta - 16\rho \sin \theta + 3 = 0$.

(1) 当 $k=1$ 时, C_1 是什么曲线?

(2) 当 $k=4$ 时, 求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

【答案】(1) 曲线 C_1 表示以坐标原点为圆心, 半径为 1 的圆; (2) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

【思路导引】(1) 利用 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ 消去参数 t , 求出曲线 C_1 的普通方程, 即可得出结论;

(2) 当 $k=4$ 时, $x \geq 0, y \geq 0$, 曲线 C_1 的参数方程化为 $\begin{cases} \sqrt{x} = \cos^2 t \\ \sqrt{y} = \sin^2 t \end{cases}$ (t 为参数), 两式相加消去参数 t , 得 C_1

普通方程, 由 $\rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$, 将曲线 C_2 化为直角坐标方程, 联立 C_1, C_2 方程, 即可求解.

【解析】(1) 当 $k=1$ 时, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 两式平方相加得 $x^2 + y^2 = 1$,

$\therefore$ 曲线 C_1 表示以坐标原点为圆心, 半径为 1 的圆.

(2) 当 $k=4$ 时, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$ (t 为参数), $\therefore x \geq 0, y \geq 0$, 曲线 C_1 的参数方程化为

$\begin{cases} \sqrt{x} = \cos^2 t \\ \sqrt{y} = \sin^2 t \end{cases}$ (t 为参数), 两式相加得曲线 C_1 方程为 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, 得 $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$, 平方得

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,$$

曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho \cos \theta - 16\rho \sin \theta + 3 = 0$, 曲线 C_2 直角坐标方程为 $4x - 16y + 3 = 0$,

联立 C_1, C_2 方程 $\begin{cases} y = x - 2\sqrt{x} + 1 \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases}$, 整理得 $12x - 32\sqrt{x} + 13 = 0$, 解得 $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{x} = \frac{13}{6}$ (舍去),

$\therefore x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}$, $\therefore C_1, C_2$ 公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

【专家解读】 本题考查了参数方程与普通方程互化, 极坐标方程与直角坐标方程互化, 考查转化与化归思想, 考查数学运算学科素养, 合理消元是解题的关系, 要注意曲线坐标的范围.

2. **【高考全国 II 卷文理数 21】** 已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 $C_1: \begin{cases} x = 4\cos^2 \theta \\ y = 4\sin^2 \theta \end{cases}$ (θ 为参数),

$$C_2: \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

(1) 将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 设 C_1, C_2 的交点为 P , 求圆心在极轴上, 且经过极

点和 P 的圆的极坐标方程.

【答案】(1) $C_1: x+y=4$; $C_2: x^2-y^2=4$; (2) $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$.

【思路导引】(1) 分别消去参数 θ 和 t 即可得到所求普通方程;

(2) 两方程联立求得点 P , 求得所求圆的直角坐标方程后, 根据直角坐标与极坐标的互化即可得到所求极坐标方程.

【解析】(1) 由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 得 C_1 的普通方程为: $x+y=4$,

$$\text{由} \begin{cases} x=t+\frac{1}{t} \\ y=t-\frac{1}{t} \end{cases} \text{得: } \begin{cases} x^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2 \\ y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2 \end{cases}, \text{两式作差可得 } C_2 \text{ 的普通方程为: } x^2-y^2=4.$$

$$(2) \text{由} \begin{cases} x+y=4 \\ x^2-y^2=4 \end{cases} \text{得: } \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}, \text{即 } P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

设所求圆圆心的直角坐标为 $(a, 0)$, 其中 $a > 0$, 则 $\left(a-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2 = a^2$, 解得: $a=\frac{17}{10}$,

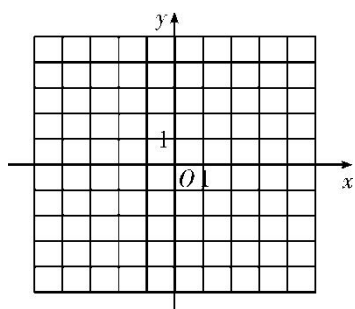
$\therefore$ 所求圆的半径 $r=\frac{17}{10}$, $\therefore$ 所求圆的直角坐标方程为: $\left(x-\frac{17}{10}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{17}{10}\right)^2$, 即 $x^2+y^2=\frac{17}{5}x$,

$\therefore$ 所求圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$.

【专家解读】本题考查了极坐标与参数方程的综合应用问题, 涉及到参数方程化普通方程、直角坐标方程化极坐标方程等知识, 考查转化与化归思想, 考查数学运算、数学建模等学科素养, 合理消元是解题的关系.

3. 【高考全国 I 卷文理数 22】已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图像;



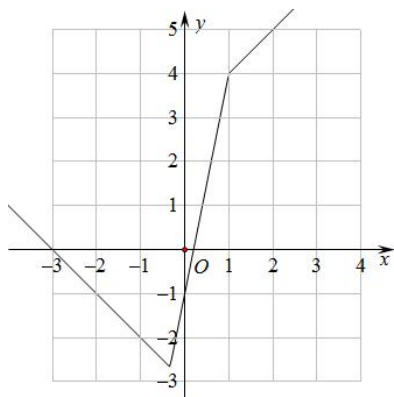
(2) 求不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集.

【答案】(1) 详解解析; (2) $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$.

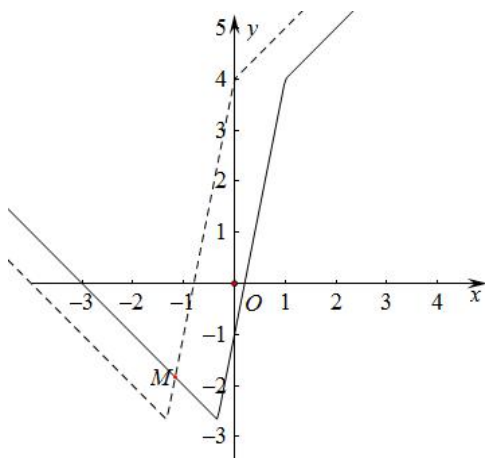
【思路导引】(1) 根据分段讨论法, 即可写出函数 $f(x)$ 的解析式, 作出图像;

(2) 作出函数 $f(x+1)$ 的图像, 根据图像即可解出.

【解析】(1) $\because f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 1 \\ 5x-1, & -\frac{1}{3} < x < 1 \\ -x-3, & x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$, 作出图像, 如图所示:



(2) 将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位, 可得函数 $f(x+1)$ 的图像, 如图所示:



由 $-x-3 = 5(x+1)-1$, 解得 $x = -\frac{7}{6}$, $\therefore$ 不等式的解集为 $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$.

【专家解读】本题考查了分段函数的图像及其应用, 考查绝对值不等式的解法, 考查数形结合思想, 考查数学运算、直观想象、数学建模等学科素养. 解题关键是正确应用零点分段法作出绝对值函数的图像.

4. 【高考全国 II 卷文理数 22】 已知函数 $f(x) = |x^2 - a| + |x - 2a + 1|$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq 4$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$; (2) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

【思路导引】(1) 分别在 $x \leq 3$ 、 $3 < x < 4$ 和 $x \geq 4$ 三种情况下解不等式求得结果;

(2) 利用绝对值三角不等式可得到 $f(x) \geq (a-1)^2$, 由此构造不等式求得结果.

【解析】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = |x-4| + |x-3|$.

当 $x \leq 3$ 时, $f(x) = 4-x+3-x = 7-2x \geq 4$, 解得: $x \leq \frac{3}{2}$;

当 $3 < x < 4$ 时, $f(x) = 4-x+x-3 = 1 \geq 4$, 无解;

当 $x \geq 4$ 时, $f(x) = x-4+x-3 = 2x-7 \geq 4$, 解得: $x \geq \frac{11}{2}$;

综上所述: $f(x) \geq 4$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$.

(2) $f(x) = |x-a^2| + |x-2a+1| \geq |(x-a^2) - (x-2a+1)| = |-a^2+2a-1| = (a-1)^2$ (当且仅当 $2a-1 \leq x \leq a^2$ 时取等号), $\therefore (a-1)^2 \geq 4$, 解得: $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

【专家解读】 本题考查了绝对值不等式的解法, 考查不等式恒成立的参数取值范围问题的解法, 考查绝对值三角不等式的应用, 考查数形结合思想、分类讨论思想, 考查数学运算、直观想象、数学建模等学科素养. 解题关键是绝对值三角不等式的应用.

5. 【高考全国 III 卷文理数 22】 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2-t-t^2, \\ y = 2-3t+t^2 \end{cases}$ (t 为参数且 $t \neq 1$),

C 与坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

【答案】(1) $4\sqrt{10}$; (2) $3\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 12 = 0$

【思路导引】(1) 由参数方程得出 A, B 的坐标, 最后由两点间距离公式, 即可得出 $|AB|$ 的值;

(2) 由 A, B 的坐标得出直线 AB 的直角坐标方程, 再化为极坐标方程即可.

【解析】(1) 令 $x=0$, 则 $t^2+t-2=0$, 解得 $t=-2$ 或 $t=1$ (舍), 则 $y=2+6+4=12$, 即 $A(0,12)$.

令 $y=0$, 则 $t^2-3t+2=0$, 解得 $t=2$ 或 $t=1$ (舍), 则 $x=2-2-4=-4$, 即 $B(-4,0)$.

$$\therefore |AB| = \sqrt{(0+4)^2 + (12-0)^2} = 4\sqrt{10}.$$

(2) 由 (1) 可知 $k_{AB} = \frac{12-0}{0-(-4)} = 3$, 则直线 AB 的方程为 $y=3(x+4)$, 即 $3x-y+12=0$.

由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 可得, 直线 AB 的极坐标方程为 $3\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 12 = 0$.

【专家解读】本题考查了极坐标与参数方程的综合应用, 考查利用参数方程求点的坐标以及直角坐标方程化极坐标方程, 考查转化与化归思想, 考查数学运算学科素养.

6. 【高考全国III卷文理数 23】设 $a, b, c \in \mathbf{R}, a+b+c=0, abc=1$.

(1) 证明: $ab+bc+ca < 0$;

(2) 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 的最大值, 证明: $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

【答案】(1) 证明见解析 (2) 证明见解析.

【思路导引】(1) 根据题设条件 $a+b+c=0$, 两边平方, 再利用均值不等式证明即可;

(2) 思路一: 不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$, 由题意得出 $a > 0, b, c < 0$,

$$\text{由 } a^3 = a^2 \cdot a = \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{b^2+c^2+2bc}{bc}, \text{ 结合基本不等式, 即可得出证明.}$$

思路二: 假设出 a, b, c 中最大值, 根据反证法与基本不等式推出矛盾, 即可得出结论.

【解析】(1) 证明: $\because a+b+c=0, \therefore (a+b+c)^2=0$.

$$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2ca=0, \text{ 即 } 2ab+2bc+2ca=-(a^2+b^2+c^2)$$

$$\therefore 2ab+2bc+2ca < 0, \therefore ab+bc+ca < 0.$$

(2) 证法一: 不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$, 由 $a+b+c=0, abc=1$ 可知, $a > 0, b < 0, c < 0$,

$$\because a = -b-c, a = \frac{1}{bc}, \therefore a^3 = a^2 \cdot a = \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{b^2+c^2+2bc}{bc} \geq \frac{2bc+2bc}{bc} = 4,$$

当且仅当 $b=c$ 时, 取等号, $\therefore a \geq \sqrt[3]{4}$, 即 $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

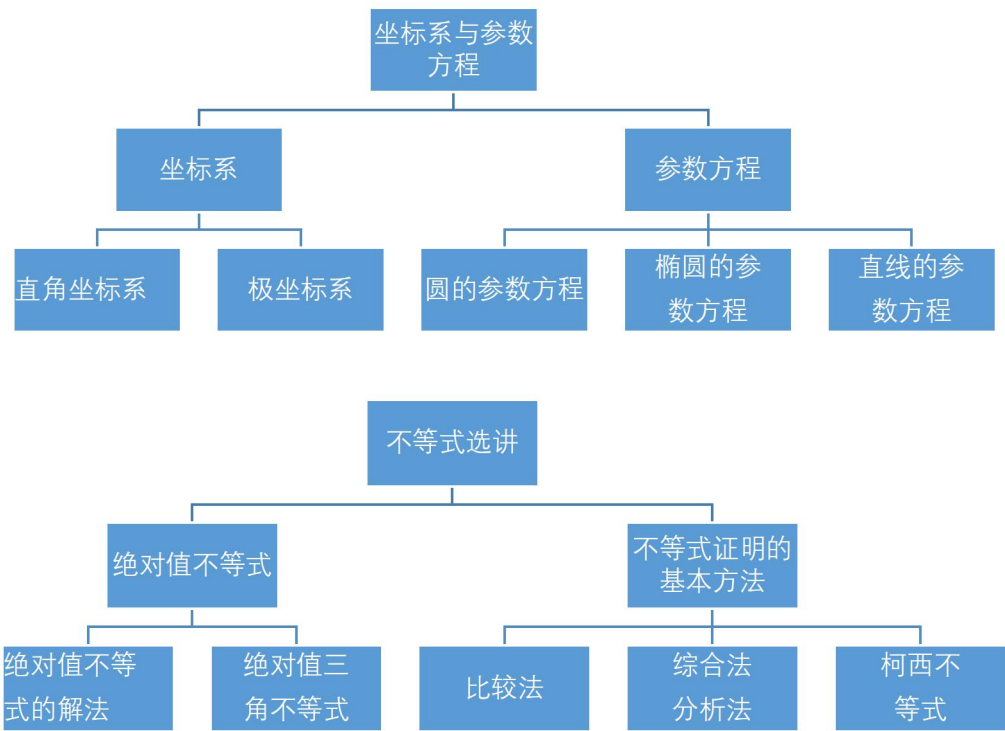
证法二：不妨设 $a \leq b < 0 < c < \sqrt[3]{4}$ ，则 $ab = \frac{1}{c} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ， $-a - b = c > \sqrt[3]{4}$ ，而

$\sqrt[3]{4} > -a - b \geq 2\sqrt{ab} > \frac{2}{\sqrt[6]{4}} = 2^{1-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ 矛盾， $\therefore$ 命题得证.

【专家解读】 本题考查了不等式的基本性质以及基本不等式的应用，考查数学运算、逻辑推理等学科素养. 解题关键是基本不等式的应用.

讲考向

一、考向分析：



二、考向讲解

考查内容	解 题 技 巧
	(1)在将直角坐标化为极坐标求极角θ时，易忽视判断点所在的象限(即角θ的终边的位置). (2)在极坐标系下，点的极坐标不惟一性易忽视. 注意极坐标(ρ, θ)(ρ, θ+2kπ), (−ρ, π+θ+2kπ)(k∈Z)表示同一点的坐标. (3)确定极坐标方程时要注意极坐标系的四要素：极点、极轴、长度单位、角度单位及其正方向，四者缺一不可.

极坐标与 参数方程	(4)研究曲线的极坐标方程往往要与直角坐标方程进行相互转化. 当条件涉及“角度”和“到定点距离”时, 引入极坐标系将会给问题的解决带来很大的方便. (5) 已知直线 l 经过点 $M_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 α, 点 $M(x, y)$ 为 l 上任意一点, 则直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$ a. 若 M_1, M_2 是直线 l 上的两个点, 对应的参数分别为 t_1, t_2, 则 $\overrightarrow{M_0M_1} \overrightarrow{M_0M_2} = t_1 t_2$, $\overrightarrow{M_1M_2} = t_2 - t_1 = \sqrt{t_2 + t_1}^2 - 4t_1 t_2$. b. 若线段 M_1M_2 的中点为 M_3, 点 M_1, M_2, M_3 对应的参数分别为 t_1, t_2, t_3, 则 $t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$. c. 若直线 l 上的线段 M_1M_2 的中点为 $M_0(x_0, y_0)$, 则 $t_1 + t_2 = 0$, $t_1 t_2 < 0$. 提醒: 在使用直线参数方程的几何意义时, 要注意参数前面的系数应该是该直线倾斜角的正余弦值, 否则参数不具备该几何含义.
不等式证明 的基本方法	1. 绝对值不等式的求解方法 (1) $ax+b \leq c$, $ax+b \geq c (c>0)$ 型不等式的解法: $ax+b \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax+b \leq c$, $ax+b \geq c \Leftrightarrow ax+b \geq c$ 或 $ax+b \leq -c$, 然后根据 a, b 的取值求解即可. (2) $x-a + x-b \geq c (c>0)$ 和 $x-a + x-b \leq c (c>0)$ 型不等式的解法: ①利用绝对值不等式的几何意义求解, 体现数形结合思想; ②利用“零点分段法”求解, 体现分类讨论思想. a. 令每个绝对值符号的代数式为零, 并求出相应的根; b. 将这些根按从小到大排列, 把实数集分为若干个区间; c. 由所分区间去掉绝对值符号得若干个不等式, 解这些不等式, 求出解集; d. 取各个不等式解集的并集就是原不等式的解集. ③通过构建函数, 利用函数图象求解, 体现函数与方程思想. 2. 解决绝对值不等式的参数范围问题常用以下两种方法: (1)将参数分类讨论, 将其转化为分段函数解决; (2)借助于绝对值的几何意义, 先求出含参数的绝对值表达式的最值或取值范围, 再根据题目要求, 求解参数的取值范围. 由于 $x-a + x-b$ 与 $x-a - x-b$ 分别表示数轴上与 x 对应的点到 a, b 对应的点的距离之和与距离之差, 因此对形如 $x-a + x-b \leq c (c>0)$ 或 $x-a - x-b \geq c (c>0)$ 的不等式, 利用绝对值的几何意义求解更直观. (3)应熟记以下转化: $f(x) > a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > a$; $f(x) < a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < a$; $f(x) > a$ 有解

$$\Leftrightarrow f(x)_{\max} > a; f(x) < a \text{ 有解} \Leftrightarrow f(x)_{\min} < a; f(x) > a \text{ 无解} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq a; f(x) < a \text{ 无解} \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a.$$

3. 绝对值不等式的综合应用

a. 研究含有绝对值的函数问题时, 根据绝对值的定义, 分类讨论去掉绝对值符号, 将原函数转化为分段函数, 然后利用数形结合解决问题, 这是常用的思想方法.

$$b. f(x) < a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x)_{\max} < a. \quad f(x) > a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f(x)_{\min} > a.$$

4. 利用综合法证明不等式时, 应注意对已证不等式的使用, 常用的不等式有:

$$(1) a^2 \geq 0; (2) |a| \geq 0;$$

$$(3) a^2 + b^2 \geq 2ab; \text{ 它的变形形式又有 } (a+b)^2 \geq 4ab, \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ 等};$$

$$(4) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0), \text{ 它的变形形式又有 } a + \frac{1}{a} \geq 2 (a > 0), \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 (ab > 0),$$

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2 (ab < 0) \text{ 等}.$$

5. 分析法证明不等式的注意事项: 用分析法证明不等式时, 不要把“逆求”错误地作为“逆推”, 分析的过程仅需要寻求充分条件即可, 而不是充要条件, 也就是说, 分析法的思维是逆向思维, 因此在证题时, 应正确使用“要证”、“只需证”这样的连接“关键词”.

6. 证明绝对值不等式 $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$. 主要的三种方法:

(1) 利用绝对值的定义去掉绝对值符号, 转化为普通不等式再证明.

(2) 利用三角不等式 $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ 进行证明.

(3) 转化为函数问题, 数形结合进行证明.

7. 当 x 的系数相等或相反时, 可以利用绝对值不等式求解析式形如 $f(x) = |x+a| + |x+b|$ 的函数的最小值, 以及解析式形如 $f(x) = |x+a| - |x+b|$ 的函数的最小值和最大值, 否则去绝对号, 利用分段函数的图象求最值. 利用柯西不等式求最值时, 要注意其公式的特征, 以出现定值为目标.

考查不等式的证明:

【例 1】(2021·宁夏吴忠一模(理)) 已知函数 $f(x) = |x+1|$.

(1) 解不等式 $f(x) < 4 - |2x-1|$;

(2) 已知 $m+n=1(m>0, n>0)$, 若 $-1 \leq a \leq 3$, 求证 $|x+a| - f(x) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2$.

【解析】(1) $f(x) < 4 - |2x-1|$ 等价于 $|x+1| < 4 - |2x-1|$,

当 $x < -1$ 时, 原不等式化为 $-(x+1) < 4 + (2x-1)$, 即 $x > -\frac{4}{3}$, $\therefore -\frac{4}{3} < x < -1$;

当 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式化为 $x+1 < 4 + (2x-1)$, 即 $x > -2$, $\therefore -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$;

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, 原不等式化为 $x+1 < 4 - 2x+1$, 即 $x < \frac{4}{3}$, $\therefore \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$;

综上所述, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}\right\}$.

(2) 证明: $|x+a| - f(x) = |x+a| - |x+1| \leq |(x+a) - (x+1)| = |a-1|$,

$\because -1 \leq a \leq 3$, $\therefore -2 \leq a-1 \leq 2$, 即 $|a-1| \leq 2$, $\therefore |x+a| - f(x) \leq 2$,

$\because m+n=1(m>0, n>0)$, $\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{m} + \frac{m+n}{n} = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 4$,

$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2 \geq 2$, $\therefore |x+a| - f(x) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2$.

【例 2】(2021·河南郑州一模(文)) 已知 $a>b>0$, 函数 $f(x) = \left|x + \frac{1}{b(a-b)}\right|$

(1) 若 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, 求不等式 $f(x) > 2$ 的解集;

(2) 求证: $f(x) + |x-a^2| \geq 4$.

【解析】(1) 由 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ 可得 $f(x) = |x+4|$, 则 $f(x) > 2$ 即 $|x+4| > 2$, 所以 $x+4 > 2$ 或 $x+4 < -2$,

解得: $x > -2$ 或 $x < -6$, 故不等式 $f(x) > 2$ 的解集为 $\{x \mid x > -2 \text{ 或 } x < -6\}$.

(2) 由题意即证, $\left|x + \frac{1}{b(a-b)}\right| + |x-a^2| \geq 4$,

因为 $\left|x + \frac{1}{b(a-b)}\right| + |x-a^2| \geq \left|x + \frac{1}{b(a-b)} - (x-a^2)\right| = \left|a^2 + \frac{1}{b(a-b)}\right|$,

因为 $a>b>0$, 所以 $a-b>0$, 所以 $b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$,

$$\text{所以 } \left| a^2 + \frac{1}{b(a-b)} \right| = a^2 + \frac{1}{b(a-b)} \geq a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \times \frac{4}{a^2}} = 4,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} a^2 = \frac{4}{a^2} \\ b = a - b \end{cases} \text{ 即 } a = \sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{所以 } \left| x + \frac{1}{b(a-b)} \right| + |x - a^2| \geq \left| a^2 + \frac{1}{b(a-b)} \right| \geq 4, \text{ 故 } f(x) + |x - a^2| \geq 4 \text{ 成立.}$$

【点睛】关键点点睛：本题要想到利用绝对值三角不等式得出 $f(x) + |x - a^2| \geq a^2 + \frac{1}{b(a-b)}$ ，这样不再含 x ，

而且 $b + (a - b) = a$ 即可用基本不等式消去 b 转化为只含 a 的代数式，再次利用基本不等式即可证明。

【例 3】设 a, b, c 均为正数，且 $a + b + c = 1$ ，证明：

$$(I) \quad ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}; \quad (II) \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1$$

【解析】(I) $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$ 得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\text{由题设得 } (a + b + c)^2 = 1, \text{ 即 } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1.$$

$$\text{所以 } 3(ab + bc + ca) \leq 1, \text{ 即 } ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}.$$

$$(II) \because \frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{c^2}{a} + a \geq 2c, \therefore \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c) \geq 2(a + b + c),$$

$$\text{即 } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \therefore \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1.$$

考查绝对值不等式的解法：

【例 1】(2021·安徽淮南一模(文)) 设函数 $f(x) = |2x + 1| - |x - 4|$ 。

(1) 解不等式 $f(x) > 0$ ；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) + 3|x - 4| - 2m^2 + 3m = 0$ 没有实数根，求实数 m 的取值范围。

【解析】(1) 当 $x \geq 4$ 时， $f(x) = 2x + 1 - (x - 4) = x + 5 > 0$ ，得 $x > -5$ ，所以 $x \geq 4$ ；

当 $-\frac{1}{2} \leq x < 4$ 时， $f(x) = 2x + 1 + x - 4 = 3x - 3 > 0$ ，得 $x > 1$ ，所以 $1 < x < 4$ ；

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -x - 5 > 0$, 得 $x < -5$, 所以 $x < -5$.

综上, 原不等式的解集为 $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$;

(2) 方程 $f(x) + 3|x - 4| - 2m^2 + 3m = 0$ 没有实数根, 即 $f(x) + 3|x - 4| = 2m^2 - 3m$ 没有实数根,

令 $g(x) = f(x) + 3|x - 4| = |2x + 1| + 2|x - 4| = |2x + 1| + |2x - 8| \geq |2x + 1 - (2x - 8)| = 9$,

当且仅当 $(2x + 1)(2x - 8) \leq 0$ 时, 即 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ 时等号成立, 即 $g(x)$ 值域为 $[9, +\infty)$,

若 $g(x) = 2m^2 - 3m$ 没有实数根, 则 $2m^2 - 3m < 9$, 即 $2m^2 - 3m - 9 < 0$, 所以实数 m 的取值范围为 $-\frac{3}{2} < m < 3$.

【点睛】方法点睛:

1、绝对值不等式的解法:

(1) 利用绝对值不等式的几何意义求解, 体现了数形结合的思想;

(2) 利于“零点分段法”去绝对值进行求解, 体现了分类讨论思想;

(3) 通过构造函数, 利用函数图象求解, 体现了函数与方程思想.

2、不等式恒成立问题通常可转化成函数最值来处理.

【例 2】(2021·内蒙古月考) 已知函数 $f(x) = |x + a| - 5$.

(1) 证明 $f(x) \leq |x + a - 5|$;

(2) 已知 $a > 0$, 若不等式 $f(x) + 2|x - 1| < 0$ 的解集为 (m, n) , 且 $n - m = \frac{4}{3}$, 求 a 的值.

【解析】(1) 证明: $f(x) - |x + a - 5| = |x + a| - |x + a - 5| - 5$.

由绝对值三角不等式知: $|x + a| - |x + a - 5| \leq |(x + a) - (x + a - 5)| = 5$,

$\therefore f(x) - |x + a - 5| \leq 5 - 5 = 0$, 即 $f(x) \leq |x + a - 5|$ 得证.

(2) 解: $f(x) + 2|x - 1| < 0$, 则 $|x + a| + 2|x - 1| < 5$,

$$\text{令 } g(x) = |x + a| + 2|x - 1| = \begin{cases} -3x + 2 - a, & x \leq -a \\ -x + a + 2, & -a < x < 1 \\ 3x + a - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x)_{\min} = g(1) = a + 1 < 5 \\ g(n) = 3n + a - 2 = 5 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} 0 < a < 4 \\ n = \frac{7 - a}{3} \end{cases}, \text{ 而 } g(1) \text{ 左侧有:}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } g(-a) = 2 + 2a \geq 5 \text{ 时, 有 } -a < m < 1, \text{ 所以 } g(m) = -m + a + 2 = 5, \text{ 得 } m = a - 3, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{3}{2} \leq a < 4 \\ \frac{7-a}{3} - a + 3 = \frac{4}{3} \end{cases},$$

得 $a = 3$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } g(-a) = 2 + 2a < 5 \text{ 时, 有 } m < -a, \text{ 所以 } g(m) = -3m + 2 - a = 5, \text{ 得 } m = \frac{-3-a}{3}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{3}{2} \\ \frac{7-a}{3} - \frac{-a-3}{3} = \frac{10}{3} \neq \frac{4}{3} \end{cases}, \text{ 故此时 } a \text{ 无解.}$$

综上, $a = 3$.

【点睛】关键点点睛:

(1) 将被证不等式转化为 $|x+a| - |x+a-5| \leq 5$, 利用 $|a| - |b| \leq |a-b|$ 即可证不等式;

(2) 令 $g(x) = |x+a| + 2|x-1|$, 则原不等式等价于 $g(x) < 5$ 且 (m, n) 为解集, 根据分段函数的性质有

$$\begin{cases} g(1) < 5 \\ g(m) = g(n) = 5, \text{ 讨论 } g(-a) \text{ 与 } 5 \text{ 的大小确定 } m \text{ 的所在区间, 求参数值.} \\ n > 1 \end{cases}$$

考查不等式恒成立问题:

【例 1】(2021·陕西西安一模(文)) 已知函数 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = |x-a| - |2x-1|$, $a \geq \frac{1}{2}$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 解不等式 $g(x^2) < -\frac{7}{2}$;

(2) 对任意 $x_1, x_2 \in R$, 若不等式 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = |x - \frac{1}{2}| - |2x-1| = -|x - \frac{1}{2}|$,

不等式 $g(x^2) < -\frac{7}{2}$, 即 $-|x^2 - \frac{1}{2}| < -\frac{7}{2}$, 即 $|x^2 - \frac{1}{2}| > \frac{7}{2}$,

解得 $x^2 > 4$ 或 $x^2 < -3$ (舍去), 由 $x^2 > 4$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 2$.

所以不等式 $g(x^2) < -\frac{7}{2}$ 的解集是 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 由题意知, 只需满足 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$ 即可.

$$\because f(x) = x^2 + 1, \therefore f(x)_{\min} = 1, \text{依题意, 当 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } g(x) = \begin{cases} x + a - 1, & x < \frac{1}{2} \\ -3x + a + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq a \\ -x - a + 1, & x > a \end{cases}$$

由一次函数性质知, $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, a\right)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = a - \frac{1}{2}$.

由 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$, 得 $1 \geq a - \frac{1}{2}$, 即 $a \leq \frac{3}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是: $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$.

【点睛】 结论点睛: 本题考查不等式的恒成立与有解问题, 可按如下规则转化:

一般地, 已知函数 $y = f(x), x \in [a, b]$, $y = g(x), x \in [c, d]$

- (1) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$, 总有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x_2)_{\min}$;
- (2) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x_2)_{\max}$;
- (3) 若 $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x_2)_{\min}$;
- (4) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集.

【例 2】 已知函数 $f(x) = |x - 1|, g(x) = t|x| - 2$.

- (1) 解关于 x 的不等式 $f(x) > 2x + 1$.
- (2) 若不等式 $f(x) \geq g(x)$ 对任意的 $x \in R$ 恒成立, 求 t 的取值范围.

【答案】 (1) $\{x | x < 0\}$ (2) $t \leq 1$

【解析】 (1) 由 $f(x) = |x - 1|, f(x) > 2x + 1$, 得 $|x - 1| > 2x + 1$,

当 $x \geq 1$ 时, $x - 1 > 2x + 1$, 解得 $x < -2$ (舍去),

当 $x < 1$ 时, $1 - x > 2x + 1$, 解得 $x < 0$, 所以 $x < 0$,

综上, 不等式的解集为 $\{x | x < 0\}$.

(2) 由 $f(x) \geq g(x)$, 得 $|x - 1| \geq t|x| - 2$, 下面分四种情形讨论:

当 $x = 0$ 时, 不等式恒成立 $t \in R$;

当 $x < 0$ 时, 不等式化简整理得 $(1-t)x \leq 3$, 即 $1-t \geq \frac{3}{x}$ 恒成立, 则 $1-t \geq 0$, 所以 $t \leq 1$;

当 $0 < x < 1$ 时, 不等式化简整理得 $(1-t)x \leq 3$, 即 $1-t \leq \frac{3}{x}$ 恒成立, 则 $1-t \leq 3$, 所以 $t \leq 2$;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式化简整理得 $(1-t)x \leq 1$, 即 $t-1 \leq \frac{1}{x}$ 恒成立, 则 $t-1 \leq 0$, 所以 $t \leq 1$;

综上 $t \leq 1$.

考查柯西不等式:

【例 1】(2021·贵州安顺模拟(文)) 设函数 $f(x) = |x-4| + |x-5|$ 的最小值为 m .

(1) 求 m ;

(2) 设 $x_1, x_2, x_3 \in R_+$, 且 $x_1 + x_2 + x_3 = m$, 求证: $\frac{x_1^2}{1+x_1} + \frac{x_2^2}{1+x_2} + \frac{x_3^2}{1+x_3} \geq \frac{1}{4}$.

【解析】(1) $\because f(x) = \begin{cases} -2x+9, & x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2x-9, & x > 5 \end{cases}$,

$\therefore x < 4$ 时, $f(x) > 1$, 且 $x > 5$ 时, $f(x) > 1$, $\therefore f(x)_{\min} = 1$, $\therefore m = 1$;

(2) 由 (1) 知 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $\therefore x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 = 4$,

$\therefore \left(\frac{x_1^2}{1+x_1} + \frac{x_2^2}{1+x_2} + \frac{x_3^2}{1+x_3} \right) \times 4 = \left(\frac{x_1^2}{1+x_1} + \frac{x_2^2}{1+x_2} + \frac{x_3^2}{1+x_3} \right) [(x_1+1) + (x_2+1) + (x_3+1)] \geq (x_1+x_2+x_3)^2 = 1$,

$\therefore \frac{x_1^2}{1+x_1} + \frac{x_2^2}{1+x_2} + \frac{x_3^2}{1+x_3} \geq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$ 取等号.

【点睛】关键点点睛: 得出 $x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 = 4$, 构造柯西不等式的形式.

【例 2】已知 a, b, c, d 为实数, 且 $a^2 + b^2 = 4$, $c^2 + d^2 = 16$, 证明: $ac + bd \leq 8$.

证明: 由柯西不等式可得 $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, 因为 $a^2 + b^2 = 4$, $c^2 + d^2 = 16$,

所以 $(ac + bd)^2 \leq 64$, 因此 $ac + bd \leq 8$.

【例 3】已知 $|x+2| + |6-x| \geq k$ 恒成立, 求实数 k 的最大值.

【解析】因为 $|x+2| + |6-x| \geq k$ 恒成立, 设 $g(x) = |x+2| + |6-x|$, 则 $g(x)_{\min} \geq k$.

又 $|x+2| + |6-x| \geq |(x+2) + (6-x)| = 8$, 当且仅当 $-2 \leq x \leq 6$ 时, $g(x)_{\min} = 8$,

所以 $k \leq 8$, 即实数 k 的最大值为 8.

考查最值问题：

【例】(2021·云南玉溪模拟(文)) 已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+b| (a>0, b>0)$.

(1) 若 $a=b=1$, 解不等式 $f(x) > 2$;

(2) 若 $f(x)$ 的值域是 $[2, +\infty)$, 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+1} \geq k$, 求 k 的最大值.

【解析】(1) $\because a=1, b=1, \therefore f(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2, & -1 < x < 1 \\ -2x, & x \leq -1 \end{cases}$.

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) > 2$ 化为 $2x > 2$, 不等式的解为 $x > 1$;

当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) > 2$ 化为 $2 > 2$, 不等式的解为 $\emptyset$;

当 $x \leq -1$ 时, $f(x) > 2$ 化为 $-2x > 2 \Rightarrow x < -1$, 所以不等式的解为 $x < -1$.

综上所述, 不等式的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$.

(2) $\because f(x) = |x-a| + |x+b| \geq |(x-a) - (x+b)| = |a+b|$, 当且仅当 $(x-a)(x+b) \leq 0$ 时取“=”号.

又 $f(x)$ 的值域是 $[2, +\infty)$, 所以 $|a+b| = 2, \because a>0, b>0, \therefore a+b=2 \Rightarrow a+2+b+1=5$.

$\because (a+2+b+1) \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+1}\right) = 2 + \left(\frac{a+2}{b+1} + \frac{b+1}{a+2}\right) \geq 2 + 2\sqrt{\frac{a+2}{b+1} \cdot \frac{b+1}{a+2}} \geq 4$ (当且仅当 $\frac{b+1}{a+2} = \frac{a+2}{b+1}$,

即 $a=0.5, b=1.5$ 时取“=”号), $\therefore \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{5}$, 当且仅当 $a=0.5, b=1.5$ 时取“=”号.

又 $\because \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+1} \geq k$ 恒成立, $\therefore k \leq \frac{4}{5}$, 故 k 的最大值是 $\frac{4}{5}$.

【点睛】本题考查含绝对值不等式问题, 解题的关键是利用绝对值三角不等式结合值域得出 $a+2+b+1=5$,

再利用基本不等式求出 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{5}$.

考查参数范围问题：

【例 1】(2021·青海海东一模(文)) 已知函数 $f(x) = |x|$.

(1) 求不等式 $3f(x-1) - f(x+1) > 2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x-a) + f(x+2) \leq f(x+3)$ 的解集包含 $[-2, -1]$, 求 a 的取值范围.

【解析】(1) $3f(x-1) - f(x+1) > 2$ 即 $3|x-1| - |x+1| > 2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x \leq -1 \\ -3(x-1) + x + 1 > 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -3(x-1) - x - 1 > 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \geq 1, \\ 3(x-1) - x - 1 > 2, \end{cases}$$

解得 $x \leq -1$ 或 $-1 < x < 0$ 或 $x > 3$, 即 $x < 0$ 或 $x > 3$, 所以原不等式的解集为 $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

$$(2) f(x-a) + f(x+2) \leq f(x+3) \text{ 即 } |x-a| + |x+2| \leq |x+3|.$$

因为不等式 $f(x-a) + f(x+2) \leq f(x+3)$ 的解集包含 $[-2, -1]$, 所以 $|x-a| + |x+2| \leq |x+3|$ 对于 $x \in [-2, -1]$ 恒

成立. 因为 $x \in [-2, -1]$, 所以 $x+2 \geq 0$, $x+3 \geq 0$, 所以 $|x-a| + |x+2| \leq |x+3|$ 等价于 $|x-a| + x+2 \leq x+3$,

即 $|x-a| \leq 1$ 恒成立, 所以 $a-1 \leq x \leq a+1$ 在 $[-2, -1]$ 上恒成立,

$$\text{所以 } \begin{cases} a-1 \leq -2, \\ -1 \leq a+1, \end{cases} \text{ 解得 } -2 \leq a \leq -1, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围为 } [-2, -1].$$

【点睛】本题是含参数的不等式存在性问题, 只要求存在满足条件的 x 即可; 不等式的解集为 R 是指不等式的恒成立问题, 而不等式的解集 $\varnothing$ 的对立面(如 $f(x) > m$ 的解集是空集, 则 $f(x) \leq m$ 恒成立)也是不等式的恒成立问题, 此两类问题都可转化为最值问题, 即 $f(x) < a$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\max}$, $f(x) > a$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\min}$.

【例】已知函数 $f(x) = |x+1| - |x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

$$\text{【解析】(1) } f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 2x-1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases},$$

当 $x < -1$ 时, $f(x) \geq 1$ 无解;

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 得, $2x-1 \geq 1$, 解得 $1 \leq x \leq 2$

当 $x > 2$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 解得 $x > 2$.

所以 $f(x) \geq 1$ 的解集为 $\{x | x \geq 1\}$.

(2) 由 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 得 $m \leq |x+1| - |x-2| - x^2 + x$, 而

$$|x+1| - |x-2| - x^2 + x \leq |x| + 1 + |x| - 2 - x^2 + |x| = -\left(|x| - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

且当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $|x+1| - |x-2| - x^2 + x = \frac{5}{4}$. 故 m 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$.

考查极坐标方程:

【例 1】(2021·江西上饶一模(理)) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$.

(1) 求曲线 C_2 的普通方程;

(2) 设 A 是曲线 C_1 上的动点, B 是曲线 C_2 上的动点, 求 $|AB|$ 的最大值.

【解析】(1) $\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta}}$, $\therefore \rho^2 (\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta) = 4$,

即 $x^2 + 4y^2 = 4$, $\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由曲线 C_1 的参数方程知其普通方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 4$, 它是以 $C(0,2)$ 为圆心, 2 为半径的圆,

$\therefore A$ 是曲线 C_1 上的动点, B 是曲线 C_2 上的动点, $\therefore |AB|_{\max} = |BC|_{\max} + 2$,

设 $B(2 \cos \beta, \sin \beta)$, 则 $|BC| = \sqrt{4 \cos^2 \beta + (\sin \beta - 2)^2} = \sqrt{-3 \sin^2 \beta - 4 \sin \beta + 8} = \sqrt{-3 \left(\sin \beta + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{28}{3}}$,

$\therefore \sin \beta = -\frac{2}{3}$ 时, $|BC|_{\max} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\therefore |AB|_{\max} = \frac{2\sqrt{21}}{3} + 2$.

【点睛】关键点睛: 在解决第二问时, 关键是由圆的性质将 $|AB|$ 的最大值转化为求 $|BC|_{\max} + 2$, 再结合点到直线的距离公式以及正弦函数的性质求出 $|AB|$ 的最大值.

【例 2】在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM| \cdot |OP| = 16$, 求点 P 的轨迹 C_2 的极坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

【答案】(1) $(x-2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0)$; (2) $2 + \sqrt{3}$.

【解析】

试题分析：(1) 设出 P 的极坐标，然后利用题意得出极坐标方程，最后转化为直角坐标方程为

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0);$$

(2) 利用(1)中的结论，设出点的极坐标，然后结合面积公式得到面积的三角函数，结合三角函数的性质可得 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2 + \sqrt{3}$ 。

试题解析：(1) 设 P 的极坐标为 $(\rho, \theta) (\rho > 0)$ ， M 的极坐标为 $(\rho_1, \theta) (\rho_1 > 0)$ ，由题设知

$$|OP| = \rho, |OM| = \rho_1 = \frac{4}{\cos \theta}.$$

由 $|OM| \cdot |OP| = 16$ 得 C_2 的极坐标方程 $\rho = 4 \cos \theta (\rho > 0)$ 。

(2) 设点 B 的极坐标为 $(\rho_B, \alpha) (\rho_B > 0)$ ，由题设知 $|OA| = 2, \rho_B = 4 \cos \alpha$ ，于是 $\triangle OAB$ 面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |OA| \cdot \rho_B \cdot \sin \angle AOB \\ &= 4 \cos \alpha \cdot \left| \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \right| \\ &= 2 \left| \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \\ &\leq 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

当 $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ 时， S 取得最大值 $2 + \sqrt{3}$ 。所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2 + \sqrt{3}$ 。

考查参数方程：

【例 1】(2021·安徽安庆一模(文)) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$,

以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$ 。

(1) 求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程；

(2) 直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点，设点 P 的坐标为 $(0, -2)$ ，求 $|PM|^2 + |PN|^2$ 的值。

【解析】(1) 曲线 C ： $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，直线 l ： $x - y - 2 = 0$ 。

(2) 设 $l: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 将 l 的参数方程代入 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$,

得 $(\frac{\sqrt{2}}{2}t-2)^2 + (-3+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 = 4$, $t^2 - 5\sqrt{2}t + 9 = 0$, 故 $t_1 + t_2 = 5\sqrt{2}$, $t_1 t_2 = 9$,

$|PM|^2 + |PN|^2 = t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 50 - 18 = 32$, 故 $|PM|^2 + |PN|^2 = 32$.

【点睛】直角坐标方程转为极坐标方程的关键是利用公式 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, 而极坐标方程转化为直角坐标方程的

关键是利用公式 $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$, 后者也可以把极坐标方程变形尽量产生 ρ^2 , $\rho \cos \theta$, $\rho \sin \theta$ 以便转化另一

方面, 当动点在圆锥曲线运动变化时, 我们可以用一个参数 θ 来表示动点坐标, 从而利用一元函数求与动点有关的最值问题.

考查参数方程与极坐标互化:

【例 1】(2021·江西上饶模拟(理)) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} - 1 \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数) 以坐

标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 直线 $OP: \theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 与曲线 C 交于点 M , N , 求线段 MN 的长.

【解析】(1) 由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} - 1 \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数) 得曲线 C 的普通方程 $(x+1)^2 - y^2 = 4$, 可化为

$x^2 + 2x - y^2 = 0$, 故其极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho \cos \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 3$.

(2) 将 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho \cos \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 3$, 得 $\rho^2 + 2\sqrt{3}\rho - 6 = 0$,

$\therefore \rho_1 + \rho_2 = -2\sqrt{3}$, $\rho_1 \rho_2 = -6$, $\therefore |MN| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2} = 6$.

【点睛】关键点点睛: 求解极坐标下的相关计算, 关键在于理解极坐标下的极径, 极角的几何意义, 运用极径

或极角表示所求的量.

【例 2】在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x=2+2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$

(φ 为参数), 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2) 已知射线 $OP: \theta_1 = \alpha$ (其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 与曲线 C 交于 O, P 两点, 射线 $OQ: \theta_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ 与直线

l 交于 Q 点, 若 $\triangle OPQ$ 的面积为 1, 求 α 的值和弦长 $|OP|$.

【答案】(1) $\rho\cos\theta - \rho\sin\theta + 1 = 0$, $\rho = 4\cos\theta$; (2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $|OP| = 2\sqrt{2}$.

【解析】(1) 直线 l 的普通方程为 $x - y + 1 = 0$, 极坐标方程为 $\rho\cos\theta - \rho\sin\theta + 1 = 0$,

曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$.

(2) 依题意, $\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore |OP| = 4\cos\alpha$, $|OQ| = \frac{1}{\left| \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \right|} = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$,

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}|OP||OQ| = \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 1, \therefore \tan\alpha = 1, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}, |OP| = 2\sqrt{2}.$$

【名师点睛】本题考查的知识要点: 三角函数关系式的恒等变换, 参数方程直角坐标方程和极坐标方程之间的转换, 三角形面积公式的应用, 主要考查学生的运算能力和转化能力, 属于基础题型.

【例 3】将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上每个点的横坐标变为原来的 4 倍, 纵坐标变为原来的 3 倍, 得曲线 C , 以坐标原点

为极点, x 轴的非负轴分别交于 A, B 半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为: $\rho\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$,

且直线 l 在直角坐标系中与 x, y 轴分别交于 A, B 两点.

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 问在曲线 C 上是否存在点 P , 使得 $\triangle ABP$ 的面积 $S_{\triangle ABP} = 3$, 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\begin{cases} x=4\cos\alpha \\ y=3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), $x + y - 6 = 0$. (2) 点 P 的坐标为 $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

【解析】(1) 曲线 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, 故曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4\cos\alpha \\ y = 3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)

直线 l 的普通方程为: $x + y - 6 = 0$.

(2) 设曲线 C 上点 $P(4\cos\alpha, 3\sin\alpha)$, 点 P 到直线 l 的距离为 d , 则

$$d = \frac{|4\cos\alpha + 3\sin\alpha - 6|}{\sqrt{2}} = \frac{|5\sin(\alpha + \varphi) - 6|}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又 } AB = 6\sqrt{2},$$

故 $S_{\triangle ABP} \geq \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$, 当 $\sin(\alpha + \varphi) = 1$ 时取等号, 即 $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$,

此时 $P\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$, 故在曲线 C 上存在点 P , 使得 $\triangle ABP$ 的面积 $S_{\triangle ABP} = 3$, 点 P 的坐标为 $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

【例 4】(2021·江西八校联考) 平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases}$ (t 为参数, 且 $t \neq -1$). 以

坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 已知点 A 的极坐标为 $(1, 0)$, 直线 $l: \theta = \alpha (\rho \in \mathbb{R})$ 与 C_1 交于点 B , 其中 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 过点 A 的直线 n 与 C_2

交于 M, N 两点, 若 $n \perp l$, 且 $\frac{|AM| \cdot |AN|}{|OB|^2} = 16$, 求 α 的取值

【答案】(1) $\rho = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} (\rho \neq \sqrt{5})$, $y^2 = 4x$; (2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

【解析】(1) $\begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{t+1} \\ y = 2 - \frac{2}{t+1} \end{cases}, \therefore x + y = 1 (x \neq -1).$

$\therefore \rho = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} (\rho \neq \sqrt{5}), \therefore \rho = \frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow \rho \sin^2\theta = 4\cos\theta \Rightarrow \rho^2 \sin^2\theta = 4\rho \cos\theta, \therefore y^2 = 4x.$

(2) 直线 $l: \theta = \alpha (\rho \in \mathbb{R})$ 与 $C_1: \rho = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} (\rho \neq \sqrt{5})$ 交于点 B , 所以 $|OB| = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$,

点 A 的极坐标为 $(1, 0)$ ，则直角坐标也是 $(1, 0)$ ，

因为 $n \perp l$ ，所以直线 n 的倾斜角 $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ，其参数方程可以设为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ y = t \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ ，化为 $\begin{cases} x = 1 - t \sin \alpha \\ y = t \cos \alpha \end{cases}$ ，

代入抛物线方程有 $\cos^2 \alpha \cdot t^2 + 4 \sin \alpha \cdot t - 4 = 0$ ， $\therefore t_1 \cdot t_2 = -\frac{4}{\cos^2 \alpha}$ ，可得 $|AM| \cdot |AN| = \frac{4}{\cos^2 \alpha}$ ，

$$\text{则 } \frac{|AM| \cdot |AN|}{|OB|^2} = \frac{\frac{4}{\cos^2 \alpha}}{\left(\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}\right)^2} = 16.$$

$$\therefore \tan \alpha = 1, \tan \alpha = -3 \text{ (舍去)}, \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

【点睛】方法点睛：消去参数的常用方法有：①代入消元法；②加减消元法；③乘除消元法；④三角恒等式消元法；极坐标方程化为直角坐标方程，只要将 $\rho \cos \theta$ 和 $\rho \sin \theta$ 换成 x 和 y 即可。

讲题型

绝对值不等式的解法

在解决有关绝对值不等式的问题时，充分利用绝对值不等式的几何意义解决问题能有效避免分类讨论不全面的问题。若用零点分段法求解，要掌握分类讨论的标准，做到不重不漏。

【例 1】解不等式 $|2x-1|+|2x+1|\leq 6$ 。

【解析】法一：当 $x > \frac{1}{2}$ 时，原不等式转化为 $4x \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$ ；

当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时，原不等式转化为 $2 \leq 6$ ，恒成立；

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时，原不等式转化为 $-4x \leq 6 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$ 。

综上知，原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$ 。

法二：原不等式可化为 $|x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{1}{2}| \leq 3$ ，其几何意义为数轴上到 $\frac{1}{2}$ ， $-\frac{1}{2}$ 两点的距离之和不超过 3 的点的集合，数

形结合知，当 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = -\frac{3}{2}$ 时，到 $\frac{1}{2}$ ， $-\frac{1}{2}$ 两点的距离之和恰好为 3，故当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时，满足题意，

则原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$ 。

【例 2】已知函数 $f(x) = |2x - a| + 5x$ ，其中实数 $a > 0$ 。

(1) 当 $a = 3$ 时，求不等式 $f(x) \geq 5x + 1$ 的解集；

(2) 若不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq -1\}$ ，求 a 的值。

【答案】(1) 不等式 $f(x) \geq 5x + 1$ 的解集为 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$ ；(2) $a = 3$

【解析】(1) 当 $a = 3$ 时， $f(x) \geq 5x + 1$ 可化为 $|2x - 3| \geq 1$ ，由此可得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ ，

故不等式 $f(x) \geq 5x + 1$ 的解集为 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$ ；

(2) 法一：(从去绝对值的角度考虑) 由 $f(x) \leq 0$ ，得 $|2x - a| \leq -5x$ ，

$$\text{此不等式化等价于 } \begin{cases} x \geq \frac{a}{2} \\ 2x - a + 5x \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < \frac{a}{2} \\ -(2x - a) + 5x \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x \geq \frac{a}{2} \\ x \leq \frac{a}{7} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < \frac{a}{2} \\ x \leq -\frac{a}{3} \end{cases},$$

因为 $a > 0$ ，所以不等式组的解集为 $\{x | x \leq -\frac{a}{3}\}$ ，由题设可得 $-\frac{a}{3} = -1$ ，故 $a = 3$ 。

法二：(从等价转化角度考虑)

由 $f(x) \leq 0$ ，得 $|2x - a| \leq -5x$ ，此不等式化等价于 $5x \leq 2x - a \leq -5x$ ，

$$\text{即为不等式组 } \begin{cases} 5x \leq 2x - a \\ 2x - a \leq -5x \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x \leq -\frac{a}{3} \\ x \leq \frac{a}{7} \end{cases}, \text{ 因为 } a > 0,$$

所以不等式组的解集为 $\{x | x \leq -\frac{a}{3}\}$ ，由题设可得 $-\frac{a}{3} = -1$ ，故 $a = 3$ 。

法三：(从不等式与方程的关系角度突破) 因为 $\{x | x \leq -1\}$ 是不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集，

所以 $x = -1$ 是方程 $f(x) = 0$ 的根，把 $x = -1$ 代入 $|2x - a| + 5x = 0$ 得 $a = 3$ 或 $a = -7$ ，

因为 $a > 0$ ，所以 $a = 3$ 。

点评：解含绝对值的不等式时，若两个绝对值中 x 的系数为 1(或可化为 1)，可选用几何法或图象法求解较为简洁。若 x 的系数不全为 1，则选用零点分段讨论法求解，同时注意端点值的取舍。

专题 15 分段函数的性质、图象以及应用

新课标下高考数学题中以分段函数为载体，考查函数的图像、性质等知识的习题倍受青睐。所谓分段函数是指自变量 x 在不同的取值范围内对应关系不同的函数，由分段函数本身的特点，使得一个函数在各段上有不同的解析式，所以可将一次函数、反比例函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数、抽象函数融合在一个题目之中，考查多个知识点。因而分段函数已成为高考命题的一个热点。纵观近几年高考对于分段函数的性质、图象的考查，重点放在函数的奇偶性、周期性以及函数的零点问题与分段函数结合上；要求学生有较强的抽象思维能力、作图能力以及准确的计算能力，才能顺利解答。从实际教学来看，这部分知识是学生掌握比较模糊，看到就头疼的题目。分析原因，除了这类题目本身就是压轴题确实不易之外，主要是学生的作图能力普遍较弱，还有就是没有形成解题的模式和套路，以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理。本文就高中阶段出现这类问题加以类型的总结和方法的探讨。

知识储备：

分段函数：定义域中各段的 x 与 y 的对应法则不同，函数式是分两段或几段给出的。分段函数是一个函数，定义域、值域都是各段的并集。分段函数中的问题一般是求解析式、值域或最值，讨论奇偶性、单调性等。分段函数的处理方法：分段函数分段研究。

分段函数的函数值问题：

(1) 已知自变量求函数值

例 1. (高考江苏卷 7) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ，则 $f(-8)$ 的值是_____。

【答案】 -4

【解析】 $y = f(x)$ 是奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ，则 $f(-8) = -f(8) = -8^{\frac{2}{3}} = -4$ 。

例 2. (2021·广西北海市·高三一模(理)) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 3 - 4x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $f(1) - f(-1) =$ ()

A. -7

B. 2

C. 7

D. -4

【答案】 A

【解析】 因为 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 3 - 4x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，所以 $f(1) = \log_2 1 = 0$ ， $f(-1) = 3 - 4(-1) = 7$ ，因此 $f(1) - f(-1) = -7$ ，

故选 A。

例 3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1 \\ x^2 + ax, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $f(f(0)) = 4a$ ，则实数 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 2 D. 9

【答案】C

【解析】 $\because f(0) = 2^0 + 1 = 2$, $\therefore f(f(0)) = f(2) = 2^2 + 2a = 4 + 2a$. 于是, 由 $f(f(0)) = 4a$ 得

$$4 + 2a = 4a \Rightarrow a = 2. \text{ 故选 C.}$$

例 4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f(g(\pi))$ 的值为

- A. 1 B. 0 C. -1 D. π

【答案】B

【解析】 $\because \pi$ 是无理数 $\therefore g(\pi) = 0$ 则 $f(g(\pi)) = f(0) = 0$, 故选 B.

例 5. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x) (x \in \mathbf{R})$, 且在区间 $(-2, 2]$ 上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ |x + \frac{1}{2}|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(15))$

的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x) (x \in \mathbf{R})$, 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 4. 因为在区间 $(-2, 2]$

上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ |x + \frac{1}{2}|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$, 所以 $f(f(15)) = f(f(-1)) = f(\frac{1}{2}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 已知函数值求自变量:

已知函数值求自变量 x 或其它参数的值的问题, 一般按自变量 x 的取值范围分类讨论, 通过解方程而得到. 数形结合是解答此类问题的重要方法.

例 1. (2021·四川武胜烈面中学校高三月考) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1 \\ -\log_2(x+1), & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(a) = -3$, 则 $f(a-7) =$

()

- A. $-\frac{7}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【解析】由于 $2^{x-1} - 2 > -2$ ，而 $f(a) = -3$ ，故 $f(a) = -\log_2(a+1) = -3$ ， $a+1 = 2^3 = 8$ ，所以 $a = 7$ 。故 $f(a-7) = f(0) = 2^{-1} - 2 = -\frac{3}{2}$ 。故选 B。

例 2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}$ 。若 $f(a) + f(1) = 0$ ，则实数 a 的值等于

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【答案】A

【解析】当 $a > 0$ 时，由 $f(a) + f(1) = 0$ 得 $2^a + 2 = 0$ ，无解；当 $a < 0$ 时，由 $f(a) + f(1) = 0$ 得 $a+1+2=0$ ，解得 $a = -3$ ，故选 A。

分段函数的定义域值域问题：

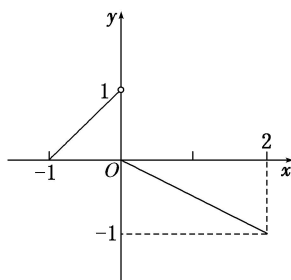
例 1. (2021·北京丰台区·高三期末) 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的值域为 ()

- A. $[0, 1)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, 1)$

【答案】D

【解析】由二次函数的性质，可得函数 $y = -x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递减，当 $x = 0$ ，函数取得最小值，最小值为 $y = 0$ ，即值域为 $(-\infty, 0]$ ；由指数函数的性质，可得函数 $y = 2^x$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 单调递增，此时值域为 $(0, 1)$ 。综上所述可得，函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 1)$ 。故选 D。

例 2. 如图为一段函数的图象，则该函数的定义域为_____，值域为_____。



【答案】 $[-1, 2]$ $[-1, 1)$

【解析】由图象可知，第一段的定义域为 $[-1, 0)$ ，值域为 $[0, 1)$ ；第二段的定义域为 $[0, 2]$ ，值域为 $[-1, 0]$ 。所以该分段函数的定义域为 $[-1, 2]$ ，值域为 $[-1, 1)$ 。

例 3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2, \\ 3+\log_a x, & x > 2, \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 $[4, +\infty)$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 $(1, 2]$

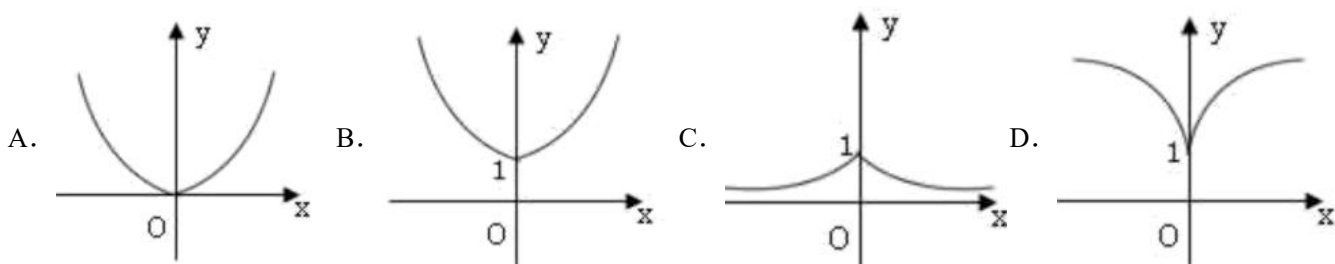
【解析】因为 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2 \\ 3+\log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ，所以当 $x \leq 2$ 时， $f(x) \geq 4$ ；又函数 $f(x)$ 的值域为 $[4, +\infty)$ ，所以

$$\begin{cases} a > 1 \\ 3+\log_a 2 \geq 4 \end{cases}, \text{解得 } 1 < a \leq 2, \text{所以实数 } a \text{ 的取值范围为 } (1, 2].$$

分段函数的图象问题：

(1) 由式定图：根据解析式确定函数的图象

例 1. (2021·西藏高三其他模拟(文)) 函数 $y = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ 的图像为 ()



【答案】B

【解析】根据题意，当 $x \geq 0$ 时， $y = 2^x$ ，为指数函数，单调递增，且在 $x=0$ 时函数有最小值 1；当 $x < 0$ 时，

$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为指数函数，单调递减，且函数值 $y > 1$ 。故选 B。

(2) 由图定式：根据图象求函数的解析式

例 1. 如图所示，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A、B、C 的坐标分别为 $(0, 4)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(6, 4)$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式。

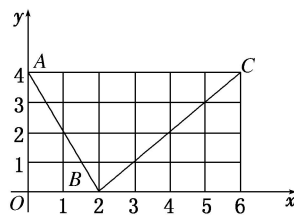
【答案】 $f(x) = \begin{cases} -2x+4, & 0 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$

【解析】设线段 AB 所对应的函数解析式为 $y=kx+b$,

将 $\begin{cases} x=0, \\ y=4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=2, \\ y=0 \end{cases}$ 代入，得

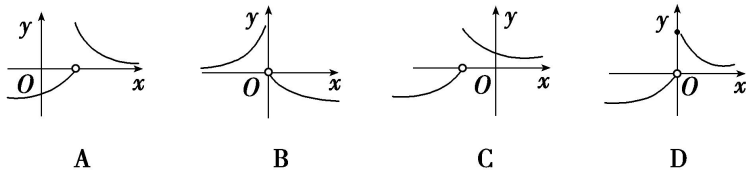
$$\begin{cases} 4=b, \\ 0=2k+b. \end{cases} \therefore \begin{cases} b=4, \\ k=-2. \end{cases} \therefore y=-2x+4 (0 \leq x \leq 2).$$

同理，线段 BC 所对应的函数解析式为 $y=x-2 (2 < x \leq 6)$ 。 $\therefore f(x) = \begin{cases} -2x+4, & 0 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$



(3) 图象的变换：

例 1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x & x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x & x > 1 \end{cases}$ ，则函数 $y=f(1-x)$ 的大致图象是 ()



解析：当 $x=0$ 时， $y=f(1)=3$ ，即 $y=f(1-x)$ 的图象过点 $(0, 3)$ ，排除 A；当 $x=-2$ 时， $y=f(3)=-1$ ，

即 $y=f(1-x)$ 的图象过点 $(-2, -1)$ ，排除 B；当 $x=-\frac{1}{3}$ 时， $y=f(\frac{4}{3})=\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{3}<0$ ，即 $y=f(1-x)$ 的图象过

点 $(-\frac{1}{3}, \log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{3})$ ，排除 C，故选 D.

分段函数与方程问题：

例 1. (2021·云南红河哈尼族彝族自治州·高三一模(文)) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1\leq x<0 \\ 1-x, & 0\leq x<1, \\ f(x-2), & x\geq 1 \end{cases}$ 若函数

$g(x)=f(x)-k(0\leq k\leq 1)$ 的所有零点从小到大依次成等差数列，则 $g(x)$ 的零点一定不包含 ()

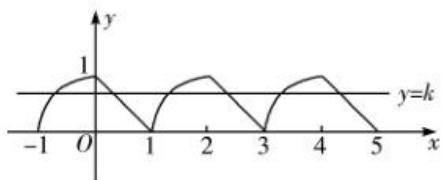
- A. $2019-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 2019 C. 2021 D. $2020+\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】由条件知 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，函数 $g(x)$ 的零点即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=k$ 的交点的横坐标作图如下，由图可知，当 $k=0$ 时， $g(x)$ 的零点为 $-1, 1, 3, 5, \dots$ ，都是奇数，此时包含 2019，当 $k=1$

时， $g(x)$ 的零点为 $0, 2, 4, \dots$ ，都是偶数，此时包含 2021，当 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， $g(x)$ 的零点为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2},$

$2-\frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$ ，此时包含 $2019-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此 $g(x)$ 的零点一定不包含 $2020+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。故选 D.



【关键点睛】解题的关键在于利用分段函数、函数的周期性以及函数的零点的概念进行作图，利用数形结合进行求解.

例 2. 对实数 a 与 b , 定义新运算“ $\otimes$ ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1, \\ b, & a-b > 1. \end{cases}$ 设 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2), x \in R$. 若函数

$y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
- C. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【答案】B

【解析】由题意知, 若 $x^2 - 2 - (x - x^2) \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = x^2 - 2$; 当 $x^2 - 2 - (x - x^2) > 1$, 即 $x < -1$ 或 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = x - x^2$, 要使函数 $y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点, 只须方程 $f(x) - c = 0$ 有两个不相等的实数根即可, 即函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = c$ 有两个不同的交点即可, 画出函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = c$, 不难得出答案 B.

例 3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则

a 的取值范围是_____.

【答案】(4, 8)

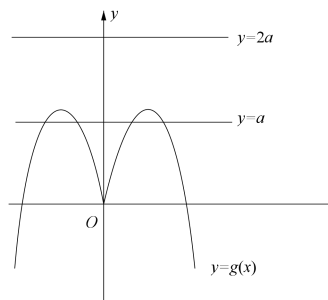
【解析】当 $x \leq 0$ 时, 由 $x^2 + 2ax + a = ax$, 得 $a = -x^2 - ax$; 当 $x > 0$ 时,

由 $-x^2 + 2ax - 2a = ax$, 得 $2a = -x^2 + ax$. 令 $g(x) = \begin{cases} -x^2 - ax, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax, & x > 0 \end{cases}$,

作出直线 $y = a$, $y = 2a$, 函数 $g(x)$ 的图象如图所示, $g(x)$ 的最大值为

$-\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$, 由图象可知, 若 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则

$a < \frac{a^2}{4} < 2a$, 得 $4 < a < 8$.



分段函数与不等式

将分段函数与不等式结合, 考查函数单调性及解不等式知识, 体现分类讨论思想.

例 1. (2021·兴义市第二高级中学高三期末(理)) 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = \frac{1}{2}f(x)$, 当 $x \in [0, 2)$

时, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -2^{1-\left|x-\frac{3}{2}\right|}, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$ 函数 $g(x) = x^3 + 3x^2 + m$. 若 $\forall s \in [-4, -2)$, $\exists t \in [-4, -2)$, 不等式 $f(s) - g(t) \geq 0$

成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -12]$ B. $(-\infty, -4]$ C. $(-\infty, 8]$ D. $(-\infty, \frac{31}{2}]$

【答案】C

【解析】 $\because$ 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -2^{1-\left|x-\frac{3}{2}\right|}, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \therefore x \in [0, 2), f(0) = \frac{1}{2}$ 为最大值,

$\therefore f(x+2) = \frac{1}{2}f(x), \therefore f(x) = 2f(x+2), \therefore x \in [-2, 0], \therefore f(-2) = 2f(0) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$

$\because x \in [-4, -3], \therefore f(-4) = 2f(-2) = 2 \times 1 = 2, \therefore \forall s \in [-4, 2), \therefore f(x)_{\max} = 2. \therefore f(x) = 2f(x+2), x \in [-2, 0],$

$\therefore f(-\frac{1}{2}) = 2f(\frac{3}{2}) = 2 \times (-2) = -4, \therefore x \in [-4, -3], \therefore f(-\frac{5}{2}) = 2f(-\frac{1}{2}) = -8. \therefore \forall s \in [-4, 2), \therefore$

$f(s)_{\min} = -8, \therefore$ 函数 $g(x) = x^3 + 3x^2 + m, \therefore g'(x) = 3x^2 + 6x$, 由 $3x^2 + 6x > 0$ 解得 $x > 0$ 或 $x < -2$, 由 $3x^2 + 6x$

< 0 解得 $-2 < x < 0$, 由 $3x^2 + 6x = 0, x = 0$ 或 $x = -2, \therefore$ 函数 $g(x) = x^3 + 3x^2 + m$, 在 $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ 上单调递

增. 在 $(-2, 0)$ 上单调递减, $\therefore \exists t \in [-4, -2), g(t)_{\min} = g(-4) = m - 16. \therefore$ 不等式 $f(s) - g(t) \geq 0, \therefore$

$8 \geq m - 16$, 故实数满足: $m \leq 8$, 故选 C.

【关键点点睛】若 $\forall s \in [-4, -2), \exists t \in [-4, -2),$ 不等式 $f(s) - g(t) \geq 0$ 成立, 转化为 $f(s)_{\min} \geq g(t)_{\min}$, 再根据解析式及导数求出函数的最小值求解, 属于中档题.

例 2. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1, & x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$, 则不等式 $f(x-1) \leq \frac{1}{2}$ 的解集为

A. $[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{7}{4}]$

B. $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$

C. $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{7}{4}]$

D. $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$

【答案】A

【解析】当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时，令 $f(x) = \cos \pi x \leq \frac{1}{2}$ ，解得 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ，当 $x > \frac{1}{2}$ 时，令 $f(x) = 2x - 1 \leq \frac{1}{2}$ ，

解得 $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}$ ，故 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$ 。∵ $f(x)$ 为偶函数，∴ $f(x) \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ ，

故 $f(x-1) \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 $[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{7}{4}]$ 。

例 3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，若 $|f(x)| \geq ax$ ，则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-2, 1]$ D. $[-2, 0]$

【答案】D

【解析】∵ $|f(x)| = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，∴ 由 $|f(x)| \geq ax$ 得 $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2x \geq ax \end{cases}$ 且 $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x+1) \geq ax \end{cases}$ ，由 $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2x \geq ax \end{cases}$

可得 $a \geq x - 2$ ，则 $a \geq -2$ ，排除 A、B，当 $a = 1$ 时，易证 $\ln(x+1) < x$ 对 $x > 0$ 恒成立，故 $a = 1$ 不适合，

排除 C，故选 D。

分段函数与零点

解决由函数零点的存在情况求参数的值或取值范围问题，关键是利用函数方程思想或数形结合思想，构建关于参数的方程或不等式求解。讨论参数、数形结合是解答此类问题的重要方法。

例 1. (高考天津卷 9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点，

则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

【答案】D

【思路导引】由 $g(0) = 0$ ，结合已知，将问题转化为 $y = |kx - 2|$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 有 3 个不同交点，分

$k = 0, k < 0, k > 0$ 三种情况，数形结合讨论即可得到答案。

【解析】注意到 $g(0) = 0$ ，所以要使 $g(x)$ 恰有 4 个零点，只需方程 $|kx - 2| = \frac{f(x)}{|x|}$ 恰有 3 个实根

即可，令 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ ，即 $y = |kx - 2|$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 的图象有 3 个不同交点。

$$\text{因为 } h(x) = \frac{f(x)}{|x|} = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases},$$

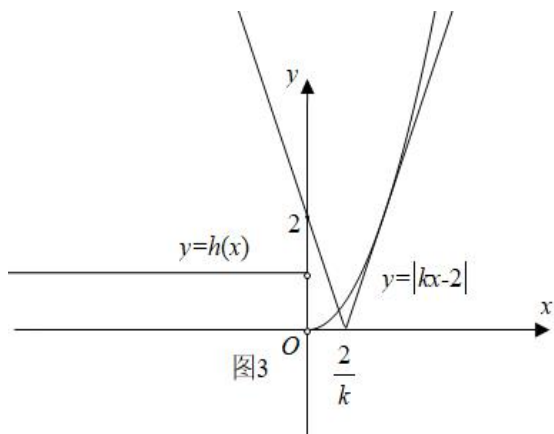
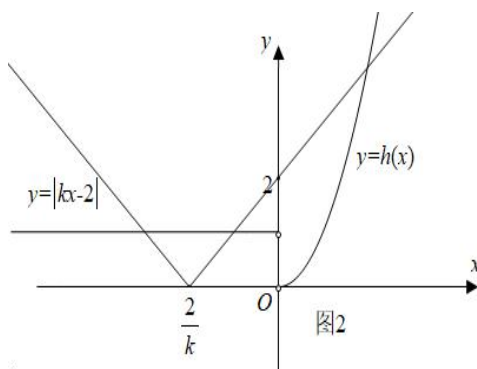
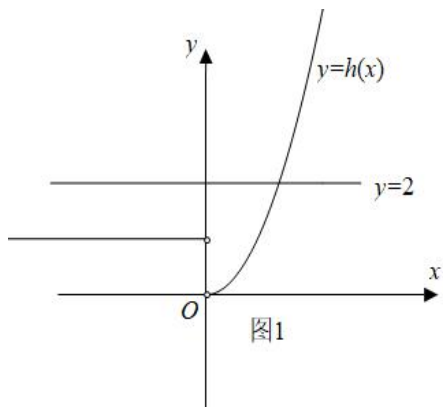
当 $k = 0$ 时，此时 $y = 2$ ，如图 1， $y = 2$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 有 2 个不同交点，不满足题意；

当 $k < 0$ 时，如图 2，此时 $y = |kx - 2|$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 恒有 3 个不同交点，满足题意；

当 $k > 0$ 时，如图 3，当 $y = kx - 2$ 与 $y = x^2$ 相切时，联立方程得 $x^2 - kx + 2 = 0$ ，

令 $\Delta = 0$ 得 $k^2 - 8 = 0$ ，解得 $k = 2\sqrt{2}$ （负值舍去），所以 $k > 2\sqrt{2}$ 。

综上， k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ ，故选 D。



【专家解读】 本题的特点是函数图象及其现在的灵活运用，本题考查了函数与方程的应用，考查数形结合、分类讨论、转化与化归等数学思想方法，考查数学运算、直观想象、数学建模等学科素养，解题关键是正确作出函数图象，应用函数图象及其性质解决问题。

例 2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是

- A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

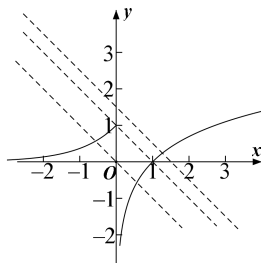
【答案】C

【解析】函数 $g(x) = f(x) + x + a$ 存在 2 个零点, 即关于 x 的方程

$f(x) = -x - a$ 有 2 个不同的实根, 即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -x - a$

有 2 个交点, 作出直线 $y = -x - a$ 与函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示, 由图可

知, $-a \leq 1$, 解得 $a \geq -1$, 故选 C.



例、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2-x)$, 其中 $b \in \mathbb{R}$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰

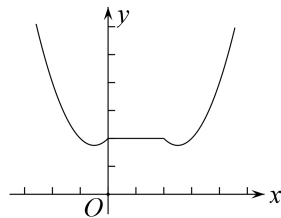
有 4 个零点, 则 b 的取值范围是

- A. $(\frac{7}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{7}{4})$ C. $(0, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2)$

【答案】D

【解析】由 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 得 $f(2-x) = \begin{cases} 2 - |2-x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$,

所以 $y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} 2 - |x| + x^2, & x < 0 \\ 4 - |x| - |2-x|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - |2-x| + (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$,



即 $y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 8, & x > 2 \end{cases}$, $y = f(x) - g(x) = f(x) + f(2-x) - b$, 所以 $y = f(x) - g(x)$

恰有 4 个零点等价于方程 $f(x) + f(2-x) - b = 0$ 有 4 个不同的解, 即函数 $y = b$ 与函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 的图

象的 4 个公共点, 由图象可知 $\frac{7}{4} < b < 2$.

分段函数与单调性、奇偶性问题

分段函数是定义域中各段的 x 与 y 的对应法则不同, 函数式是分两段或几段给出的. 因此求解析式时, 也是分段求解析式的.

例 1. (2021·天津静海区·高三月考) $f(x) = \begin{cases} a^x, & (x > 1) \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & (x \leq 1) \end{cases}$ 是 R 上的单调递增函数, 则实数 a 的取值

范围为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $[4, 8)$ C. $(4, 8)$ D. $(1, 8)$

【答案】B

【解析】由题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ 在 R 单调递增, 可得 $\begin{cases} a > 1 \\ 4 - \frac{a}{2} > 0 \\ a^1 \geq 4 - \frac{a}{2} + 2 \end{cases}$, 解得 $4 \leq a < 8$, 即

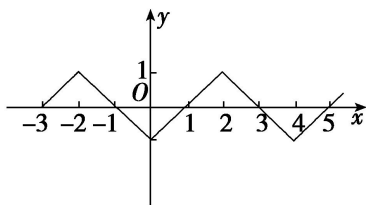
实数 a 的取值范围为 $[4, 8)$. 故选 B.

例 2. 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x - 1$, 则不等式 $xf(x) > 0$ 在 $[-1, 3]$ 上的解集为 ()

- A. $(1, 3)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-1, 0) \cup (1, 3)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

【答案】C

【解析】 $f(x)$ 的图象如图. 当 $x \in (-1, 0)$ 时, 由 $xf(x) > 0$ 得 $x \in (-1, 0)$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, 由 $xf(x) < 0$ 得 $x \in \emptyset$; 当 $x \in (1, 3)$ 时, 由 $xf(x) > 0$ 得 $x \in (1, 3)$. 故 $x \in (-1, 0) \cup (1, 3)$.



例 3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增. 若实数 a 满足

$$f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1), \text{ 则 } a \text{ 的取值范围是}$$

- A. $[1, 2]$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ D. $(0, 2]$

【答案】C

【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且 $\log_{\frac{1}{2}} a = -\log_2 a$,

所以 $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) = f(\log_2 a) + f(-\log_2 a) = 2f(\log_2 a) \leq 2f(1)$, 即 $f(\log_2 a) \leq f(1)$, 因为函数在区间

$[0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $f(|\log_2 a|) \leq f(1)$, 即 $|\log_2 a| \leq 1$, 所以 $-1 \leq \log_2 a \leq 1$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$, 即 a 的取值

范围是 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ，故选 C.

分段函数的周期性、奇偶性问题

例 1. (2021·浙江温州市·高三期末) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x-1)$ ，且当 $x \in [-1, 1]$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \log_b x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, \text{ 其中 } a \in \mathbf{R}, b > 0 \text{ 且 } b \neq 1. \text{ 若 } f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 1, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】1 $\frac{1}{4}$

【解析】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x-1)$ ，则 $f(x) = f(x+2)$ ，所以，函数 $f(x)$ 是周

期为 2 的周期函数，当 $x \in [-1, 1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \log_b x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ ， $b > 0$ 且 $b \neq 1$.

由 $f(-1) = f(1)$ ，可得 $-a+1=0$ ，解得 $a=1$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_b \frac{1}{2}$ ， $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ ，

由 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ 可得 $\log_b \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ，可得 $\log_b \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，可得 $b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ，解得 $b = \frac{1}{4}$. 因此， $a=1$ ， $b = \frac{1}{4}$.

【方法点睛】函数的三个性质：单调性、奇偶性和周期性，在高考中一般不会单独命题，而是常将它们综合在一起考查，其中单调性与奇偶性结合、周期性与抽象函数相结合，并结合奇偶性求函数值，多以选择题、填空题的形式呈现，且主要有以下几种命题角度：

- (1) 函数的单调性与奇偶性相结合，注意函数的单调性及奇偶性的定义，以及奇、偶函数图象的对称性.
- (2) 周期性与奇偶性相结合，此类问题多考查求值问题，常利用奇偶性及周期性进行交换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解；
- (3) 周期性、奇偶性与单调性相结合，解决此类问题通常先利用周期性转化自变量所在的区间，然后利用奇偶性和单调性求解.

例 2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若对于 $x \geq 0$ ，都有 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$ ，且当 $x \in [0, 2)$ 时，

$f(x) = \log_2(x+1)$ ，则求 $f(-2015) + f(2017)$ 的值为_____.

【答案】0

【解析】当 $x \geq 0$ 时， $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$ ， $\therefore f(x+4) = f(x)$ ，即 4 是 $f(x)(x \geq 0)$ 的一个周期. $\therefore f(2017)$

$$= f(1) = \log_2 2 = 1, f(-2015) = f(2015) = f(3) = -\frac{1}{f(1)} = -1, \therefore f(-2015) + f(2017) = 0.$$

例 3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ ，满足 $f(-x) = -f(x)$ 且 $f(x) = f(2-x)$. 当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) = \log_2 x$ ，则方程

$f(x) = 1$ 在 $[-6, 6]$ 上的实数根之和为_____.

【答案】-6

【解析】因为 $f(-x) = -f(x)$ 且 $f(x) = f(2-x)$ ，所以 $f(x) = f(2-x) = -f(x-2) = -f(2-(x-2)) = -f(4-x) = f(x-4)$ ，即： $f(x) = f(x-4)$ 所以函数 $f(x)$ 的周期为 4. 当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) = \log_2 x$ ，所以当 $x \in [-1, 0)$ 时， $f(x) = -f(-x) = -\log_2(-x)$ ，因为函数在 $[-1, 0)$ 上单调递增，所以在 $[-1, 0)$ 上 $f(x) = -\log_2(-x) = 1$ 有且只有一解 $x_1 = -\frac{1}{2}$ ，当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) = \log_2 x = 1$ 无解. 即 $f(x) = 1$ 在

$[-1, 0) \cup (0, 1]$ 内只有一解： $x_1 = -\frac{1}{2}$ ，因为函数 $f(x)$ 满足： $f(x) = f(2-x)$ 所以函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线

$x = 1$ 对称，可得： $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{2})$ ，所以 $f(x) = 1$ 在 $[-1, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3]$ 内的解有两个 $x_1 = -\frac{1}{2}$ ， $x_2 = \frac{5}{2}$ ，即在

一个周期内满足 $f(x) = 1$ 的解有两个 $x_1 = -\frac{1}{2}$ ， $x_2 = \frac{5}{2}$ ，由函数 $f(x)$ 的周期为 4 可得：

$f(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{9}{2}) = f(\frac{7}{2}) = 1$ ， $f(\frac{5}{2}) = f(-\frac{3}{2}) = f(-\frac{11}{2}) = 1$ ，所以方程 $f(x) = 1$ 在 $[-6, 6]$ 上的实数根分别为

$-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ ，其和为： $-\frac{11}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = -6$.

分段函数的最值问题

分段函数的值域是各段值域的并集，最大值是各段最大值中的最大者是函数的最大值，最小值是各段最小值中的最小者，一般可借助于图像来解决.

例 1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1 \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 的最小值是_____.

【答案】 $2\sqrt{2} - 3$

【解析】 $\because f(-3) = 1$ ， $f(1) = 0$ ，即 $f(f(-3)) = 0$. 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, 1)$ 上单调递增，

在 $(1, \sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min} = \min\{f(0), f(\sqrt{2})\} = 2\sqrt{2} - 3$.

例、对于任意实数 a, b ，定义 $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$ 函数 $f(x) = -x + 3$ ， $g(x) = \log_2 x$ ，则函数 $h(x) = \min\{f(x),$

$g(x)\}$ 的最大值是_____.

【答案】1

【解析】依题意， $h(x) = \begin{cases} \log_2 x, & 0 < x \leq 2, \\ -x+3, & x > 2. \end{cases}$ 当 $0 < x \leq 2$ 时， $h(x) = \log_2 x$ 是增函数，当 $x > 2$ 时， $h(x) = 3-x$ 是减

函数，则 $h(x)_{\max} = h(2) = 1$.

分段函数单调性问题

例 1. 已知 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x+1 & (x < 1), \\ a^x & (x \geq 1) \end{cases}$ ，满足对任意 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ 成立，那么 a 的取值范围是()

A. $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

B. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

C. $(1, 2)$

D. $(1, +\infty)$

【答案】A

【解析】依题意， $f(x)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上的增函数，于是有 $\begin{cases} 2-a > 0, \\ a > 1, \\ (2-a) \times 1 + 1 \leq a^1. \end{cases}$ 解得 $\frac{3}{2} \leq a < 2$ ，故选 A.

例、设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$ ，则满足 $f(x) \leq 2$ 的 x 的取值范围是

A. $[-1, 2]$

B. $[0, 2]$

C. $[1, +\infty)$

D. $[0, +\infty)$

【答案】D

【解析】当 $x \leq 1$ 时 $2^{1-x} \leq 2$ ，解得 $x \geq 0$ ，所以 $0 \leq x \leq 1$ ；当 $x > 1$ 时， $1 - \log_2 x \leq 2$ ，解得 $x \geq \frac{1}{2}$ ，所

以 $x > 1$ ，综上所述可知 $x \geq 0$.

点睛：解分段函数单调性问题时，需要考虑两段函数都是增函数或减函数，其次考虑两段函数的分界点，如果是增函数，则左侧函数的最大值要小于等于右侧函数的最小值，反之，左侧函数的最小值要大于等于右侧函数的最大值.

【反思提升】

综合上面的类型，解决分段函数函数问题类型，涉及到很多数学思想主、方法；分段函数首先是函数，且是一个函数，不是多个函数；分段函数的处理方法：分段函数分段研究；解题中务必看清自变量在哪一段，该代哪个解析式，这样就要分段讨论、求解，即要重视分类讨论思想在解题过程中的应用.

专题 16 基本初等函数中含有参数问题

纵观近几年高考对于基本初等函数的考查,基本初等函数中的参数问题一直是高考考查的热点问题之一.高考考查参数的常见类型主要有:已知集合之间的包含关系求参数;已知函数的性质求参数;已知函数的零点或方程、不等式有实数解求参数及已知函数图象特征求参数.针对高考考查的常见类型进行归纳整理,抓住基本初等函数的图象与性质,从“数”与“形”两个方面,进行全面系统复习,有助于适应高考的要求,获取高考高分.

一、集合关系下求参数问题

已知集合之间的关系求参数的范围,是常见题型之一,此类问题常常与函数相结合,其解法通常是借助于数轴,构建不等式(组)或应用函数的性质求解.

例 1. (高考全国 I 卷理数 2) 设集合 $A=\{x|x^2-4\leq 0\}$, $B=\{x|2x+a\leq 0\}$, 且 $A\cap B=\{x|-2\leq x\leq 1\}$, 则 $a=(\quad)$

A. -4

B. -2

C. 2

D. 4

【答案】B

【思路导引】由题意首先求得集合 A, B , 然后结合交集的结果得到关于 a 的方程, 求解方程即可确定实数 a 的值.

【解析】求解二次不等式 $x^2-4\leq 0$ 可得: $A=\{x|-2\leq x\leq 2\}$, 求解一次不等式 $2x+a\leq 0$ 可得:

$$B=\left\{x\mid x\leq -\frac{a}{2}\right\}. \text{ 由于 } A\cap B=\{x\mid -2\leq x\leq 1\}, \text{ 故: } -\frac{a}{2}=1, \text{ 解得: } a=-2. \text{ 故选 B.}$$

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了一元二次不等式的解法、含参数的一元一次不等式的解法, 考查利用集合的交集运算求参数的值, 考查数形结合思想, 考查数学运算及直观想象等学科素养. 解题关键是正确求解一元二次不等式, 应用数形结合法求参数的值.

例 2. 已知集合 $A=\{m+2, 2m^2+m\}$, 若 $3\in A$, 则 m 的值为_____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$.

【解析】因为 $3\in A$, 所以 $m+2=3$ 或 $2m^2+m=3$.

当 $m+2=3$, 即 $m=1$ 时, $2m^2+m=3$, 此时集合 A 中有重复元素 3, 所以 $m=1$ 不符合题意, 舍去;

当 $2m^2+m=3$ 时, 解得 $m=-\frac{3}{2}$ 或 $m=1$ (舍去), 当 $m=-\frac{3}{2}$ 时, $m+2=\frac{1}{2}\neq 3$ 符合题意. 所以 $m=-\frac{3}{2}$.

例 3. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leq x\leq 5\}$, $B=\{x\mid m+1\leq x\leq 2m-1\}$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 m 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, 3]$.

【解析】 $\because B \subseteq A$,

$$\therefore \textcircled{1} \text{ 若 } B = \varnothing, \text{ 则 } 2m-1 < m+1, \text{ 此时 } m < 2. \quad \textcircled{2} \text{ 若 } B \neq \varnothing, \text{ 则 } \begin{cases} 2m-1 \geq m+1, \\ m+1 \geq -2, \\ 2m-1 \leq 5. \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq m \leq 3.$$

由①②可得, 符合题意的实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 3]$.

例 4. 设集合 $A = \left\{ 5, \frac{b}{a}, a-b \right\}$, $B = \{b, a+b, -1\}$, 若 $A \cap B = \{2, -1\}$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $a=1, b=2$

【解析】由 $A \cap B = \{2, -1\}$, 得 $\begin{cases} \frac{b}{a} = 2, \\ a-b = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{b}{a} = -1, \\ a-b = 2. \end{cases}$

当 $\begin{cases} \frac{b}{a} = 2, \\ a-b = -1 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases}$ 此时 $A = \{5, 2, -1\}$, $B = \{2, 3, -1\}$, 符合题意;

当 $\begin{cases} \frac{b}{a} = -1, \\ a-b = 2 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases}$ 此时 $A = \{5, -1, 2\}$, $B = \{-1, 0, -1\}$, 不符合题意.

二、与函数的奇偶性有关的求参数问题

已知函数的奇偶性求参数, 通常是应用奇偶函数的定义, 构建恒等式, 或借助于函数图象的对称性解题.

例 5. 若函数 $f(x) = \frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数, 则 $a =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

【答案】A

【解析】 $\because f(x) = \frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数, $\therefore f(-1) + f(1) = 0$, 得 $a = \frac{1}{2}$.

例 6. 【高考山东卷 8】若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$ C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

【答案】D

【思路导引】首先根据函数奇偶性与单调性, 得到函数 $f(x)$ 在相应区间上的符号, 再根据两个数的乘积大于等于零, 分类转化为对应自变量不等式, 最后求并集得结果.

【解析】因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调递减, 且 $f(-2) = 0$, $f(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$,

所以由 $xf(x-1) \geq 0$ 可得: $\begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \text{ 或 } x-1 \geq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \text{ 或 } x-1 \leq -2 \end{cases}$ 或 $x = 0$,

解得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 3$, 所以满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1, 0] \cup [1, 3]$, 故选 D.

【专家解读】本题的特点是注重函数性质的应用, 本题考查了函数的奇偶性、单调性, 考查抽象不等式的解法, 考查分类讨论、数形结合、转化与化归等思想方法, 考查数学运算、直观想象、数学建模等学科素养.

例 7. (2021 百事联盟) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$ 且当 $x_1 > x_2 \geq 0$ 时, 有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 当 $x + y = 2020$ 时, 有 $f(x) + f(2020) > f(y)$ 恒成立, 则 x 的取值范围为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

【答案】B

【解析】根据 $f(x) + f(-x) = 0$ 得 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则有 $f(0) = 0$.

又由 $x_1 > x_2 \geq 0$ 时, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 得 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 又 $y = f(x)$ 是奇函数, 则有

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递减. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 所以 $f(2020) < 0$.

当 $x < 0$ 时, $y = 2020 - x > 2020$. 所以 $f(y) < f(2020) < f(x)$, 则恒有 $f(x) + f(2020) > f(y)$;

当 $x = 0$ 时, $y = 2020$, 此时 $f(x) + f(2020) = f(2020) = f(y)$, 故 $f(x) + f(2020) > f(y)$ 不成立;

当 $x > 0$ 时, $y = 2020 - x < 2020$, 所以 $f(y) > f(2020)$ 此时, $f(x) < 0$,

故 $f(y) > f(2020) + f(x)$, 与条件矛盾, 故 x 的取值范围为 $(-\infty, 0)$. 故选 B.

【关键点点睛】此题考查函数奇偶性的应用和单调性的应用, 解题的关键是根据 $f(x) + f(-x) = 0$ 得

$f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则有 $f(0) = 0$. 又由 $x_1 > x_2 \geq 0$ 时, 有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 得 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 又 $y = f(x)$ 是奇函数, 则有 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也

单调递减. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 所以 $f(2020) < 0$. 然后分情况求解即可.

解题关键是正确应用函数的性质，转化为不等式组来求解.

例 8. 设是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+2)=f(2-x)$ 时，当 $x \in [-2, 0]$ 时， $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 1$ ，若 $(-2, 6)$ 在区间内关于 x 的方程 $xf(x) - \log_a(x+2) = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 有且只有 4 个不同的根，则实数 a 的范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ B. $(1, 4)$ C. $(1, 8)$ D. $(8, +\infty)$

【答案】D

【解析】 $\because$ 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x-2)=f(2+x)$ ， $f(x+4)=f[2+(x+2)]=f[(x+2)-2]=f(x)$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是一个周期函数，且 $T=4$ ，又 $\because$ 当 $x \in [-2, 0]$ 时，

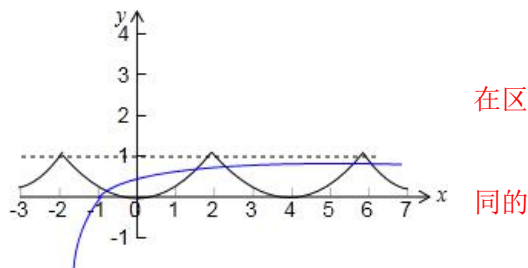
$f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 1$ ，且函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若

在区间 $(-2, 6)$ 内关于 x 的方程 $f(x) - \log_a(x+2) = 0$ 恰有 4 个不

实数解，则函数 $y = f(x)$ 与 $y = \log_a(x+2)$ ($a > 1$) 在区间

$(-2, 6)$ 上有四个不同的交点，如下图所示：又 $f(-2) = f(2) = f(6) = 1$ ，则对于函数 $y = \log_a(x+2)$ ，由

题意可得，当 $x=6$ 时的函数值小于 1，即 $\log_a 8 < 1$ ，由此解得： $a > 8$ ， $\therefore a$ 的范围是 $(8, +\infty)$ ，故选 D.



三、与函数的单调性有关的求参数问题

已知函数的单调性求参数，通常是应用增函数、减函数的定义构建不等式(组)，或应用分离参数法，转化成求函数的最值问题.

例 9. (2021 河北衡水市·衡水中学高三其他模拟(文)) 已知函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $0 \leq x_1 < x_2$ ，都有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ；②函数 $y = f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称. 若实数 a, b 满足

$f(a^2 + 2b) \leq -f(-b^2 - 2a)$ ，则当 $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时， $\frac{a}{a+b}$ 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $[2, 4]$

【答案】B

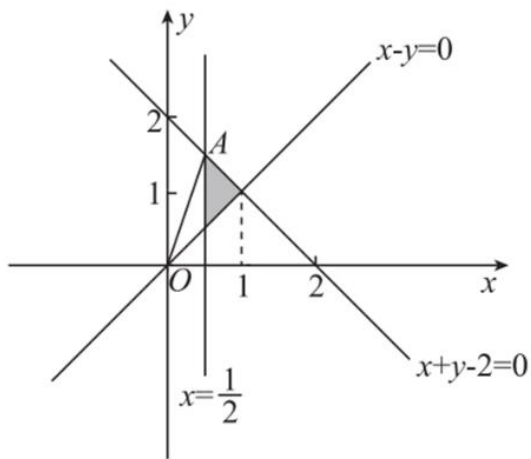
【解析】由对任意 $0 \leq x_1 < x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，可得， $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减；由函数

$y = f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称，得函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称，可得函数 $y = f(x)$ 为奇函数；故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减。于是得 $f(a^2 + 2b) \leq f(b^2 + 2a)$ ， $\therefore a^2 + 2b \geq b^2 + 2a$ ，

$\therefore b^2 - a^2 + 2a - 2b \leq 0$ ， $\therefore (b-a)[b-(2-a)] \leq 0$ 。则当 $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时，令 $a = x$ ， $b = y$ ，则问题等价于

点 (x, y) 满足区域 $\begin{cases} (y-x)[y-(2-x)] \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ ，如图阴影部分，由线性规划知识可知 $\frac{y}{x}$ 为 (x, y) 与 $(0, 0)$ 连线的

斜率，由图可得 $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} \in [1, 3]$ ， $\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 。故选 B。



例 10. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减，且为奇函数。若 $f(1) = -1$ ，则满足 $-1 \leq f(a-2) \leq 1$ 的 a 的取值范围是

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

【答案】D

【解析】由函数 $f(x)$ 为奇函数，得 $f(-1) = -f(1) = 1$ ，不等式 $-1 \leq f(a-2) \leq 1$ 即为

$f(1) \leq f(a-2) \leq f(-1)$ ，又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减，所以得 $1 \geq a-2 \geq -1$ ，即 $1 \leq a \leq 3$ 。

例 11. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \geq 0 \\ mx + m - 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，则 m 的取值范围是_____。

【答案】 $(0, 3]$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \geq 0 \\ mx + m - 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore$ 函数 $y = mx + m - 1$ 在区间

$(-\infty, 0)$ 上为增函数, $\therefore \begin{cases} m > 0 \\ m - 1 \leq 2^0 + 1 = 2 \end{cases}$, 解得 $0 < m \leq 3$, $\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(0, 3]$. 故答案为 $(0, 3]$.

【名师点睛】解答此类问题时要注意两点: 一是根据函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增得到在定义域的每一个区间上函数都要递增; 二是要注意在分界点处的函数值的大小, 这一点容易忽视, 属于中档题.

例 12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $y = f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) < f(2)$, 则 a 的取值范围是

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ D. $(4, +\infty)$

【答案】 C

【解析】根据题意, $y = f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 即函数 $f(x)$

为偶函数, 又由函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $f(|\log_2 a|) < f(2)$, 则 $|\log_2 a| < 2$,

即 $-2 < \log_2 a < 2$, 解得 $\frac{1}{4} < a < 4$, 即 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$. 故选 C.

【名师点睛】本题考查函数的单调性与奇偶性的应用, 考查对数不等式的解法.

四、与函数方程有关的求参数问题

已知方程有实数解(函数有零点、函数图象有公共点)求参数, 通常是通过分离参数, 转化成求函数的最值或借助于函数的图象, 利用数形结合思想求解.

例 13. (2021·山西吕梁市·高三一模(理)) 已知 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2}x^2$, 若 $f(x) = k$ 有四个不等的实根, 则 k 的取值范围为 ()

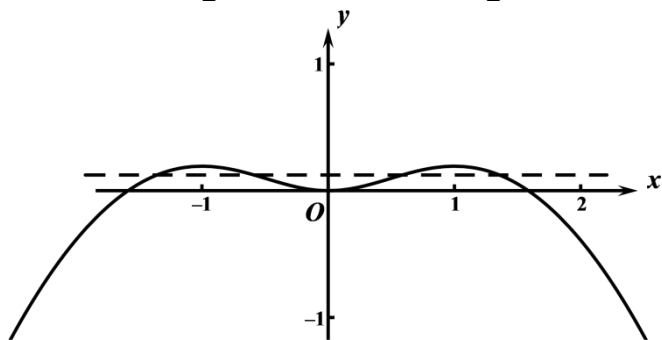
- A. $\left(0, \ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\infty, \ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\ln 2 - \frac{1}{2}, \ln 2 + \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\ln 2 + \frac{1}{2}, +\infty\right)$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数,

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - x = \frac{x(1-x^2)}{x^2 + 1}$, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$ 或 $x = -1$, $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$,

$f'(x) < 0$ ，由偶函数可知，可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值， $x=1$ 或 $x=-1$ 处取极大值。因 $f(0)=0$ ， $f(\pm 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$ ，所以 $0 < k < \ln 2 - \frac{1}{2}$ 时， $f(x) = k$ 有四个不等的实根。故选 A。



【方法点睛】 本题考查由函数零点求参数问题，解答时要先将函数的零点问题转化为方程有根的问题，再运用函数思想将问题转化为研究函数图象的性质和最大最小值的问题，考查了分析问题解决问题的能力。

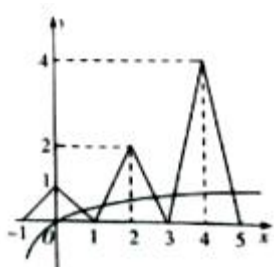
例 14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2f(x-2), & x \in (1, +\infty), \\ 1-|x|, & x \in [-1, 1], \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) - \log_a(x+1) = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

在区间 $[0, 5]$ 内恰有 5 个不同的根，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{3})$ B. $(\sqrt[4]{5}, +\infty)$ C. $(\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(\sqrt[4]{5}, \sqrt{3})$

【答案】C

【解析】 要使方程 $f(x) - \log_a(x+1) = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[0, 5]$ 内恰有 5 个不同的根，只需 $y = f(x)$ 与 $y = \log_a(x+1)$ 的图象在区间 $[0, 5]$ 内恰有 5 个不同的交点，在同一坐标系内做出它们的图象 要使它们在区间 $[0, 5]$ 内恰有 5 个不同的交点，只需 $\begin{cases} \log_a 3 < 2 \\ \log_a 5 < 4 \end{cases}$ ，得 $a > \sqrt{3}$ ，故选 C。



例 15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ 其中 $m > 0$ ，若存在实数 b ，使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有

三个不同的根，则 m 的取值范围是_____。

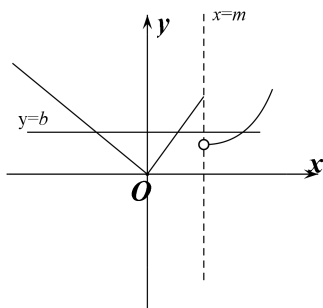
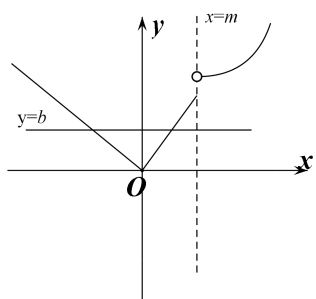
【答案】 $(3, +\infty)$

【解析】由题意，当 $x > m$ 时， $f(x) = x^2 - 2mx + 4m = (x - m)^2 + 4m - m^2$ ，其顶点为 $(m, 4m - m^2)$ ；当 $x \leq m$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x = m$ 的交点为 $Q(m, m)$ 。

①当 $\begin{cases} m > 0 \\ 4m - m^2 \leq m \end{cases}$ ，即 $0 < m \leq 3$ 时，函数 $f(x)$ 的图象如图 1 所示，此时直线 $y = b$ 与函数 $f(x)$ 的图象有一个或两个不同的交点，不符合题意；

②当 $\begin{cases} 4m - m^2 < m \\ m > 0 \end{cases}$ ，即 $m > 3$ 时，函数 $f(x)$ 的图象如图 2 所示，则存在实数 b 满足 $4m - m^2 < b \cdot m$ ，使得

直线 $y = b$ 与函数 $f(x)$ 的图象有三个不同的交点，符合题意。综上， m 的取值范围为 $(3, +\infty)$ 。



五、与函数零点有关的求参数问题

例 16. (2021 河南河南豫南九校联考) 已知 $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + 2x^2 - 3$ ， $f'(-1) = -f'(1)$ ， $g(x) = |f'(x) - k| - 1$ ，

若函数 $g(x)$ 有且只有两个零点，则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup \left(\frac{19}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{15}{3}\right) \cup \left(\frac{15}{3}, +\infty\right)$
C. $\left(-\frac{13}{3}, \frac{15}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{15}{3}, \frac{19}{3}\right)$

【答案】A

【解析】因为 $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + 2x^2 - 3$ ，所以 $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x$ ，

因为 $f'(-1) = -f'(1)$ ，所以 $\frac{1}{3} + a - 4 = -\left(-\frac{1}{3} + a + 4\right) = \frac{1}{3} - a - 4$ ，所以 $a = 0$ ，所以 $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ ，

令 $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ ，则 $h'(x) = -x^2 + 4 = -(x+2)(x-2)$ 。

令 $h'(x) > 0$ ，得 $-2 < x < 2$ ，令 $h'(x) < 0$ ，得 $x < -2$ 或 $x > 2$ ，

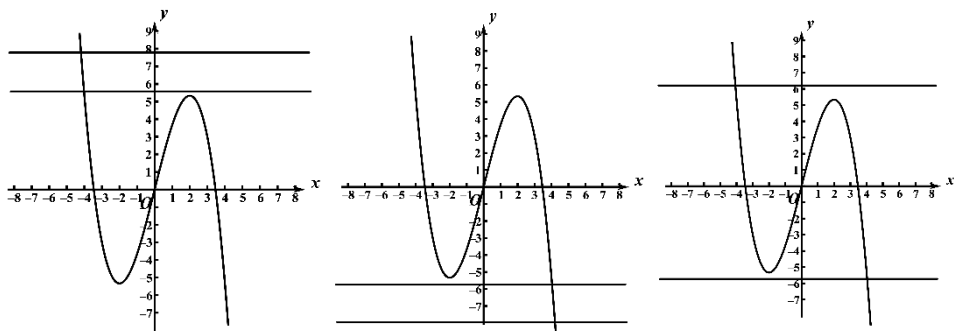
所以 $f'(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增，在 $(-\infty, -2)$ ， $(2, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $f'(x)$ 的极大值为 $f'(2) = \frac{16}{3}$ ，极小值为 $f'(-2) = -\frac{16}{3}$ 。

因为函数 $g(x)$ 有且只有两个零点, 所以方程 $|f'(x) - k| = 1$ 有且只有两个实数根, 即方程 $f'(x) = k + 1$ 和

$f'(x) = k - 1$ 共有两个实数根. 又 $k + 1 > k - 1$, 所以 $k + 1 < -\frac{16}{3}$ 或 $k - 1 > \frac{16}{3}$ 或 $\begin{cases} k - 1 < -\frac{16}{3} \\ k + 1 > \frac{16}{3} \end{cases}$, 解得 $k < -\frac{19}{3}$ 或

$k > \frac{19}{3}$. 故选 A.



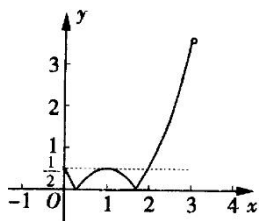
【关键点睛】 在考查函数的零点的个数判定及应用时, 把函数的零点个数的问题转化为两个函数的图象的交点个数, 正确作出函数的图象是解答问题的关键.

例 17. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的函数, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = |x^2 - 2x + \frac{1}{2}|$. 若函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点(互不相同), 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(0, \frac{1}{2})$

【解析】 函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有互不相同的 10 个零点, 即函数 $y = f(x)$ 与 $y = a$ 的图象有 10 个

不同的交点, 在坐标系中作出函数 $y = f(x)$ 在一个周期内的图象, 可知 $0 < a < \frac{1}{2}$.



六、与不等式成立(恒成立)有关的求参数问题

已知不等式成立(恒成立)求参数, 通常是通过解不等式(组)或利用数形结合思想或通过分离参数, 使问题转化成研究函数的最值求解.

例 18. 当 $x \in (-\infty, -1]$ 时, 不等式 $(m^2 - m) \cdot 4^x - 2^x < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是()

A. $(-1, 2)$ B. $(-4, 3)$ C. $(-2, 1)$ D. $(-3, 4)$
【答案】A
【解析】 $\because (m^2 - m)4^x - 2^x < 0$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时恒成立, $\therefore m^2 - m < \frac{2^x}{4^x} = \frac{1}{2^x}$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时恒成立,

 由于 $f(x) = \frac{1}{2^x}$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时单调递减, $\therefore x \leq -1, \therefore f(x) \geq 2, \therefore m^2 - m < 2, \therefore -1 < m < 2$.

例 19. (2021 · 山西吕梁市 · 高三一模(文)) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 3$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f'(x) < 2$, 则 $f(x) \geq 2x + 1$ 的解集为 ()

 A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$
【答案】B
【解析】 令 $F(x) = f(x) - 2x - 1$, 则 $F'(x) = f'(x) - 2$, 又因为对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f'(x) < 2$, 所以

 $F'(x) = f'(x) - 2 < 0$ 恒成立, 所以 $F(x) = f(x) - 2x - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调. 又 $F(1) = f(1) - 2 - 1 = 0$, 所以 $F(x) \geq 0$

 的解集为 $(-\infty, 1]$, 故选 B.

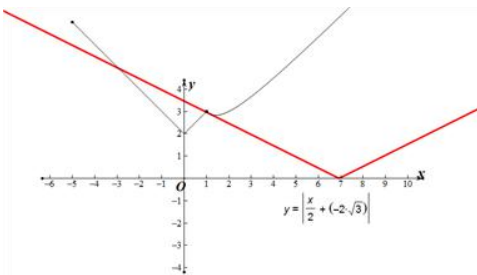
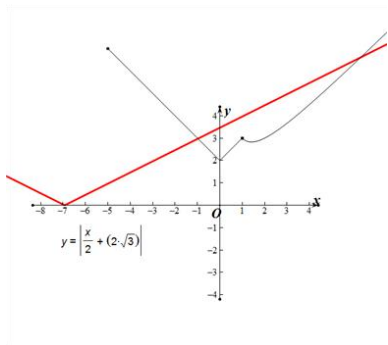
【名师点睛】 利用单调性解不等式通常用于:

(1) 分段函数型不等式; (2) 复合函数型不等式; (3) 抽象函数型不等式; (4) 解析式较复杂的不等式.

例 20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x| + 2, & x < 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值

范围是

 A. $[-2, 2]$ B. $[-2\sqrt{3}, 2]$ C. $[-2, 2\sqrt{3}]$ D. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$
【答案】A
【解析】 满足题意时 $f(x)$ 的图象恒不在函数 $y = |\frac{x}{2} + a|$ 下方, 当 $a = 2\sqrt{3}$ 时, 函数图象如图所示, 排除 C, D 选

 项; 当 $a = -2\sqrt{3}$ 时, 函数图象如图所示, 排除 B 选项.


七、与函数图象有关的求参数问题

函数的综合应用问题，往往涉及函数的性质及导数的应用，一般与“恒成立问题”相关，通常是运用转化与化归思想、数形结合思想，灵活处理.

例 21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0, \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在

$y = kx - 1$ 的图像上，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

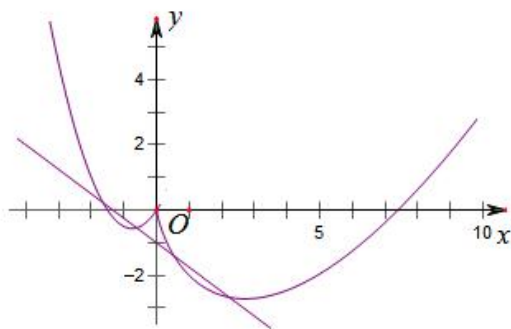
【答案】A

【解析】直线 $y = kx - 1$ 关于直线 $y = -1$ 的对称直线是 $y = -kx - 1$ ，则直线 $y = -kx - 1$ 与函数 $f(x)$ 的图像有四个交点，作出函数 $f(x)$ 和直线 $y = -kx - 1$ 的图象（如图所示），设直线 $y = k_1x - 1$ 与 $y = x^2 + \frac{3}{2}x (x \leq 0)$ 相

切于点 (x_1, y_1) ，则 $\begin{cases} y_1 = k_1x_1 - 1 \\ y_1 = x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 \end{cases}$ ，解得

$$2x_1 + \frac{3}{2} = k_1$$

$x_1 = -1$
 $\begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ，设直线 $y = k_2x - 1$ 与



$y = x \ln x - 2x (x > 0)$ 相切于点 (x_2, y_2) ，则 $\begin{cases} y_2 = k_2x_2 - 1 \\ y_2 = x_2 \ln x_2 - 2x_2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x_2 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$ ，则 $-1 < -k < -\frac{1}{2}$ ，即

$\frac{1}{2} < k < 1$ ，故选 A.

例 22. 已知当 $x \in [0, 1]$ 时，函数 $y = (mx - 1)^2$ 的图象与 $y = \sqrt{x} + m$ 的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是

- A. $(0, 1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(0, 1] \cup [3, +\infty)$
 C. $(0, \sqrt{2}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$

【答案】B

【解析】当 $0 < m \leq 1$ 时， $\frac{1}{m} \geq 1$ ，函数 $y = f(x) = (mx - 1)^2$ ，在 $[0, 1]$ 上单调递减，函数 $y = g(x) = \sqrt{x} + m$ ，

在 $[0, 1]$ 上单调递增，因为 $f(0) = 1$ ， $g(0) = m$ ， $f(1) = (m - 1)^2$ ， $g(1) = 1 + m$ ，所以 $f(0) > g(0)$ ，

$f(1) < g(1)$ ，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 有一个交点；当 $m > 1$ 时， $0 < \frac{1}{m} < 1$ ，函数

$y = f(x) = (mx - 1)^2$ ，在 $[0, \frac{1}{m}]$ 上单调递减，在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上单调递增，此时 $f(0) < g(0)$ ，在 $[0, \frac{1}{m}]$ 无交点，

要使两个函数的图象有一个交点，需 $f(1) \geq g(1)$ ，即 $(m - 1)^2 \geq 1 + m$ ，解得 $m \geq 3$ 。选 B。

【反思提升】

综合上面的各种类型，解决基本初等函数中的参数问题，要点有：一是对基本初等函数图象与性质的熟练掌握；二是数形结合思想、分类讨论思想、转化与化归思想等数学思想方法的运用；三是通过对近几年高考题目的总结归纳，积累应对经验。分析可以发现，基本初等函数中的参数问题，涉及函数种类多、题型多，题目的难易不一，因此，在复习中不能好高骛远，应重视各种题型的备考演练，重视高考信息的搜集，不断充实题目的类型，升华解题的境界。

专题 17 函数、数列、三角函数中大小比较问题

纵观近几年高考对于大小比较问题的考查，重点放在与函数、数列、三角函数的大小比较问题上，要求学生有较强的推理能力和准确的计算能力，才能顺利解答，从实际教学来看，这部分知识是学生掌握最为模糊，看到就头疼的题目。分析原因，除了这类题目的入手确实不易之外，主要是学生没有形成解题的模式和套路，以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理。本文就高中阶段出现这类问题加以类型的总结和方法的探讨。

1 函数中的大小比较问题

函数是高中数学必修教材中重要的部分，应用广泛，教材中重点介绍了利用判断单调性、最值、单调性、奇偶性、周期性等基础知识，但是高考数学是以能力立意，所以往往以数列、方程、不等式为背景，综合考察学生转化和化归、分类讨论、数形结合等数学思想的应用能力，面对这种类型的题目，考生会有茫然，无所适从的感觉，究其原因没有认真分析总结这种题目的特点和解题思路。

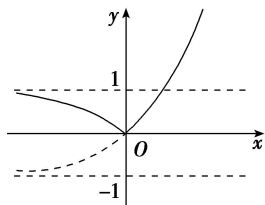
1.1 指数函数中的大小比较问题

C. $2^{-a} < 2^c$

D. $2^a + 2^c < 2$

【答案】D

【解析】作出函数 $f(x) = |2^x - 1|$ 的图象，如图， $\because a < b < c$ ，且 $f(a) > f(c) > f(b)$ ，结合图象知， $0 < f(a) < 1$ ， $a < 0$ ， $c > 0$ ， $\therefore 0 < 2^a < 1$ ， $\therefore f(a) = |2^a - 1| = 1 - 2^a < 1$ ， $\therefore f(c) < 1$ ， $\therefore 0 < c < 1$ ， $\therefore 1 < 2^c < 2$ ， $\therefore f(c) = |2^c - 1| = 2^c - 1$ ，又 $\because f(a) > f(c)$ ， $\therefore 1 - 2^a > 2^c - 1$ ， $\therefore 2^a + 2^c < 2$ ，故选 D.



1.2 对数函数中的大小比较问题

比较对数值的大小时，要注意区分对数底数是否相等，是用对数函数的单调性，还是用对数函数的单调性，要注意对数函数图象的应用，还应注意中间量 0，1 等的运用.

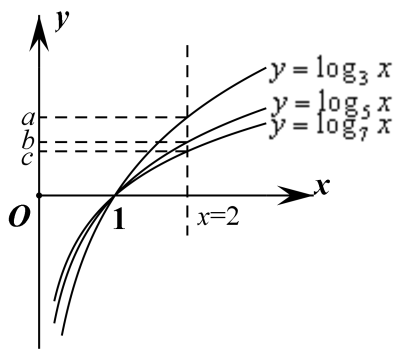
例 5. 设 $a = \log_3 6$, $b = \log_5 10$, $c = \log_7 14$ ，则

A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

【答案】D

【解析】 $a = \log_3 6 = 1 + \log_3 2$, $b = \log_5 10 = 1 + \log_5 2$, $c = \log_7 14 = 1 + \log_7 2$ ，

由下图可知 D 正确.



解法二 $a = \log_3 6 = 1 + \log_3 2 = 1 + \frac{1}{\log_2 3}$, $b = \log_5 10 = 1 + \log_5 2 = 1 + \frac{1}{\log_2 5}$,

$c = \log_7 14 = 1 + \log_7 2 = 1 + \frac{1}{\log_2 7}$ ，由 $\log_2 3 < \log_2 5 < \log_2 7$ ，可得答案 D 正确.

例 6. (2021·江西重点中学协作体联考) 设 $a = \frac{2}{5} \ln \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5} \ln \frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{5} \ln \frac{3}{5}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $c > b > a$ D. $b > c > a$

所以 $c = \ln \frac{101}{100} < \frac{101}{100} - 1 = \frac{1}{100}$ ，又因为 $b > \frac{1}{100}$ ，所以 $b > c$ ，又因为 $-\ln x > -x + 1 (x \neq 1)$ ，所以

$$c = \ln \frac{101}{100} = -\ln \frac{100}{101} > -\frac{100}{101} + 1 = \frac{1}{101} = a, \text{ 即 } c > a, \text{ 综上 } b > c > a, \text{ 故选 B.}$$

【关键点点睛】本题主要考查利用导数研究函数的单调性来解决比较大小问题，解决本题的关键为构造函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 和 $g(x) = \ln x - x + 1$ ，属于难题。

1.4 结合函数的奇偶性、单调性比较大小

例 1. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数，且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = \left| \frac{\ln x}{x} \right|$ 。若

$$a = f\left(-\frac{\pi}{2}\right), b = f\left(-\frac{e}{2}\right), c = f\left(\frac{2}{3}\right), \text{ 则 } a, b, c \text{ 的大小关系是 ()}$$

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

【答案】D

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $a = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ， $b = f\left(-\frac{e}{2}\right) = f\left(\frac{e}{2}\right)$ ，

$$\text{当 } x \in (1, e) \text{ 时, } f(x) = \left| \frac{\ln x}{x} \right| = \frac{\ln x}{x}, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

因为 $x \in (1, e)$ ，所以 $0 < \ln x < 1$ ，所以 $f'(x) > 0$ ，所以 $y = f(x)$ 在 $x \in (1, e)$ 上单调递增，

$$\text{因为 } 1 < \frac{e}{2} < \frac{\pi}{2} < e, \text{ 所以 } f\left(\frac{e}{2}\right) < f\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ 即 } b < a, c = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left| \frac{\ln \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \right| = -\frac{3}{2} \ln \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{2} \ln \frac{27}{8},$$

$$\text{又 } a = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(2) = \left| \frac{\ln 2}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln 2, \text{ 且 } \frac{27}{8} > 2, \text{ 所以 } c > a, \text{ 所以 } c > a > b, \text{ 故选 D.}$$

【关键点点睛】本题考查根据函数单调性比较大小，解题的关键是利用导数判断出 $f(x)$ 在 $x \in (1, e)$ 的单调性进行判断。

例 2. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数，记

$$a = \log_{0.5} 3, b = f(\log_2 5), c = f(2m) \text{ 则 } a, b, c \text{ 的大小关系为}$$

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$

C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】C

【解析】因为函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ 为偶函数，所以 $m = 0$ ，即 $f(x) = 2^{|x|} - 1$ ，所以 $a = f(\log_{0.5} 3) = f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) = 2^{\left|\log_2 \frac{1}{3}\right|} - 1 = 2^{\log_2 3} - 1 = 3 - 1 = 2$ ， $b = f(\log_2 5) = 2^{\log_2 5} - 1 = 4$ ， $c = f(2m) = f(0) = 2^0 - 1 = 0$ ，所以 $c < a < b$ ，故选 C.

1.5 数列中的比较大小问题

例 1. (2021·江西上饶一模) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -11, a_4 = -5$. 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n = 1, 2, \cdots)$ ，则数列 $\{T_n\}$ ()

A. 有最大项，有最小项

B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项

D. 无最大项，无最小项

【答案】C

【解析】依题意可得公差 $d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{-5 + 11}{3} = 2$ ， $a_n = a_1 + (n - 1)d = -11 + 2n - 2 = 2n - 13$ ，所以当 $n \leq 6$ 时， $a_n < 0$ ，当 $n \geq 7$ 时， $a_n \geq 0$ ，因为 $T_1 = -11 < 0$ ， $T_2 = -11 \times (-9) = 99 > 0$ ， $T_3 = -11 \times (-9) \times (-7) = -693 < 0$ ， $T_4 = -11 \times (-9) \times (-7) \times (-5) = 3465 > 0$ ， $T_5 = 3465 \times (-3) = -10395 < 0$ ， $T_6 = -10395 \times (-1) = 10395 > 0$ ，又当 $n \geq 6$ 时， $T_n = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots a_n > 0$ ，且 $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = a_{n+1} = 2n - 11 \geq 1$ ，即 $T_{n+1} \geq T_n$ ，所以当 $n \geq 6$ 时，数列 $\{T_n\}$ 单调递增，所以数列 $\{T_n\}$ 无最大项，数列 $\{T_n\}$ 有最小项 $T_5 = -10395$ ，故选 C.例 2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，则“ $d > 0$ ”是“ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】 $\because (S_6 - S_5) - (S_5 - S_4) = a_6 - a_5 = d$ ，当 $d > 0$ ，可得 $S_4 + S_6 > 2S_5$ ；当 $S_4 + S_6 > 2S_5$ ，可得 $d > 0$. 所以“ $d > 0$ ”是“ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ”充分必要条件，选 C.

则下列不等式成立的是 ()

- A. $f(0) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$ B. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{4})$ C. $f(0) > 2f(\frac{\pi}{3})$ D. $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3}) < f(-\frac{\pi}{4})$

【答案】D

【解析】构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$ ，依题意 $F'(x) = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x} > 0$ ，故函数在定义域上为增函数，由

$F(0) < F(\frac{\pi}{4})$ 得 $\frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}}$ ，即 $f(0) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$ ，排除 A 选项。由 $F(\frac{\pi}{3}) > F(\frac{\pi}{4})$ 得 $\frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}} > \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}}$ ，即

$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) > f(\frac{\pi}{4})$ ，排除 B 选项。由 $F(0) < F(\frac{\pi}{3})$ 得 $\frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}}$ ，即 $f(0) < 2f(\frac{\pi}{3})$ ，排除 C 选项。由

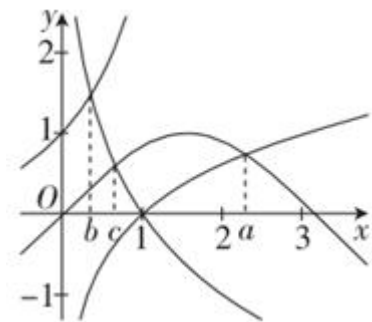
$F(-\frac{\pi}{2}) < F(-\frac{\pi}{4})$ 得 $\frac{f(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} < \frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\cos(-\frac{\pi}{4})}$ ，即 $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{2}) < f(-\frac{\pi}{4})$ ，D 选项正确，故选 D。

例 1. (2021·安徽皖西南期末) 设函数 $f(x) = \sin x - \log_3 x$ ， $g(x) = 3^x - \log_{0.5} x$ ， $h(x) = \sin x - \log_{0.5} x$ 的零点分别为 a, b, c ，则 ()

- A. $a > c > b$ B. $c > b > a$ C. $c > a > b$ D. $a > b > c$

【答案】A

【解析】设函数 $f_1(x) = \sin x$ ， $f_2(x) = \log_3 x$ ， $f_3(x) = \log_{0.5} x$ ， $f_4(x) = 3^x$ ，则 a 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 图象交点的横坐标， b 是 $f_3(x)$ 与 $f_4(x)$ 图象交点的横坐标， c 是 $f_1(x)$ 与 $f_3(x)$ 图象交点的横坐标，在同一坐标系中，作出 $f_1(x)$ ， $f_2(x)$ ， $f_3(x)$ ， $f_4(x)$ 的图象，如图所示。



由图可知 $a > c > b$ ，故选 A。

【关键点点睛】本题考查比较函数零点大小，本题的关键是将函数零点转化为两个函数的交点，在同一坐标系下画出函数的图象，比较交点的横坐标。

2.1 函数与不等式明相结合

在对不等式的证明过程中,可以依此不等式的特点构造函数,进而求函数的最值,当该函数的最大值或最小值对不等式成立时,则不等式是永远是成立的,从而可将不等式的证明转化到求函数的最值上来.

例1. (2021 安徽高三月考) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$.

(1) 证明: $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 证明: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < \ln \sqrt{n+1}$.

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 由 $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$, 即 $f(x)$ 在定义域内为增函数, 即可证明结论.

(2) 根据(1)结论, 令 $x = \frac{1}{n}$ 可得 $\frac{2}{2n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$, 将 $n \in N^*$ 所得的 n 个式子相加, 结合对数运算性质、放缩法即可证不等式.

【解析】(1) $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$, 故 $f(x)$ 为增函数, $f(x) > f(0) = 0$.

(2) 由(1)知: $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$, 令 $x = \frac{1}{n}$ 时, 有 $\frac{2 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 2} < \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \Rightarrow \frac{2}{2n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$,

故 $\frac{2}{3} < \ln \frac{2}{1}$, $\frac{2}{5} < \ln \frac{3}{2}$, ..., $\frac{2}{2n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$,

将 n 式相加得: $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2n+1} < \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$,

$\therefore \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2} \ln(n+1) = \ln \sqrt{n+1}$.

【关键点睛】(1) 利用函数的导函数确定函数单调性证明函数不等式.

(2) 由(1)结论, 令 $x = \frac{1}{n}$ 有 $\frac{2}{2n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$, 应用累加求和求证不等式.

例. (2021 浙江高三二模) 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{15}{4}$, 若数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 、 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 都是等比数

列, 公比分别是 q_1 、 q_2 ($q_1 \neq q_2$), 设 S_n 是数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和, 数列 $\{b_n\}$ 是 $f(x) = e^x \cos x - 1$ 的零点按

从小到大的顺序排成的数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并证明: $S_n < \frac{4}{3}$;

(2) 证明: $\forall k \in N^*$, 有 $2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} < b_{2k} < 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$.

【答案】(1) $a_n = 2^n - \frac{1}{2^n}$, 证明见解析; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 由数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$, $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 的公比分别为 q_1 、 q_2 , 写出等比数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$, $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 的通项公式, 联立求得 q_1 、 q_2 ($q_1 \neq q_2$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可求, 由

$\frac{1}{a_n} = \frac{2^n}{2^{2n} - 1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{2n-2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{a_{n-2}} < \dots < \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{a_1}$, 然后利用等比数列的前 n 项和证得答案;

(2) 先利用导数判断函数单调性, 得到 $f(x)$ 在 $\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ ($k \in Z$) 递增,

$\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$ ($k \in Z$) 递减, 再根据零点存在定理得到 b_{2k} 为函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点, 且满足

$2k\pi - \frac{7\pi}{4} < b_{2k} < 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$ ($k \in N^*$), 最后利用分析法把要证的不等式转化为证明

$f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\right) = e^{2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}} \sin \frac{\pi}{2k} - 1 > 0$ 即可, 然后结合函数放缩证明即可.

【解析】(1) 因为数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 、 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 的公比分别为 q_1 、 q_2 ,

$$\text{所以} \begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)q_1^{n-1} = \frac{3}{4}q_1^{n-1} \text{①} \\ 2a_{n+1} - a_n = (2a_2 - a_1)q_2^{n-1} = 6q_2^{n-1} \text{②} \end{cases},$$

$2 \times \text{②} - \text{①}$ 得 $a_{n+1} = 4q_2^{n-1} - \frac{1}{4}q_1^{n-1}$, ③; $\text{②} - 2 \times \text{①}$ 得 $a_n = 2q_2^{n-1} - \frac{1}{2}q_1^{n-1}$, ④.

$\therefore a_2 = \frac{15}{4}$, 由④可得 $a_2 = 2q_2 - \frac{1}{2}q_1 = \frac{15}{4}$, $\therefore q_1 = 4q_2 - \frac{15}{2}$, 又分别由③④可得 $a_3 = 4q_2 - \frac{1}{4}q_1 = 2q_2^2 - \frac{1}{2}q_1^2$,

$$\text{联立} \begin{cases} q_1 = 4q_2 - \frac{15}{2} \\ 4q_2 - \frac{1}{4}q_1 = 2q_2^2 - \frac{1}{2}q_1^2 \end{cases}, \text{可得 } 2q_2^2 - 9q_2 + 10 = 0, \text{解得} \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} \\ q_2 = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} q_1 = \frac{5}{2} \\ q_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (不合题意, 舍去)}.$$

由④得 $a_n = 2^n - \frac{1}{2^n}$.

因为 $\frac{1}{a_n} = \frac{2^n}{2^{2n}-1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{2n-2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{a_{n-2}} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$,

所以 $S_n \leq \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < \frac{4}{3}$.

(2) 由题, $f(x) = e^x \cos x - 1 = 0$, 故 $\cos x = \frac{1}{e^x} \leq 1$, 则 $b_n = x \geq 0$, 显然 $b_1 = 0$,

且 $0 < \cos b_n \leq 1 (n \geq 2)$, 故点 (n, b_n) 在第一、四象限,

即 $n \geq 2$ 时, $b_n \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi \right)$, 其中 $k \in \mathbf{N}$,

又 $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) = -\sqrt{2}e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

令 $f'(x) > 0$, 可得 $2k\pi - \pi < x - \frac{\pi}{4} < 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$;

令 $f'(x) < 0$, 可得 $2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$.

所以, 函数 $y = f(x)$ 在 $\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right) (k \in \mathbf{Z})$ 递增, $\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right) (k \in \mathbf{Z})$ 递减.

① 当 $b_n \in \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi \right) (k \in \mathbf{N})$ 时, $f\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = -1 < 0$, $f(2k\pi + 2\pi) = e^{2k\pi+2\pi} - 1 > 0$,

所以, $f(x) = 0$ 有且只有一解;

② 当 $b_n \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) (k \in \mathbf{N})$ 时, $f(2k\pi) = e^{2k\pi} - 1 \geq 0$, $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} - 1 > 0$,

$f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -1 < 0$, 故当 $b_n \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right) (k \in \mathbf{N})$, $f(x) = 0$ 无解;

当 $b_n \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) (k \in \mathbf{N})$, $f(x) = 0$ 有且仅有一解.

综合①②可得: 点 $(n, b_n) (n \geq 2)$ 在第一、四象限交替出现, 且 $b_1 = 0$, 故易得 b_{2k} 为函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$

内的零点, 且满足 $2k\pi - \frac{7\pi}{4} < b_{2k} < 2k\pi - \frac{3\pi}{2} (k \in N^*)$. (*)

(i) 当 $k=1$ 时, 显然有 $b_2 > \frac{\pi}{4} > 2\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \times 1} = 0$, 即 $0 < b_2 < \frac{\pi}{2}$;

(ii) 当 $k \geq 2$ 时, 由函数 $f(x)$ 的单调性可知, 要证 $b_{2k} > 2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} \geq 2k\pi - \frac{7\pi}{4}$,

只需 $f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\right) = e^{\frac{2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}}{2}} \sin \frac{\pi}{2k} - 1 > 0$ 即可,

令 $g(x) = e^x - ex$, 则 $g'(x) = e^x - e$, 当 $x < 1$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$.

所以, 函数 $g(x) = e^x - ex$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$,

所以, $g(x) \geq g(1) = 0$, 即 $e^x \geq ex$,

所以, $e^{\frac{2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}}{2}} > e^{2k\pi - 2\pi} \geq e(2k\pi - 2\pi) = 2k \times \frac{e(k-1)\pi}{k} \geq 2k \times \frac{e\pi}{2} > 2k$,

又令 $h(t) = \sin \pi t - t$, 其中 $0 < t \leq \frac{1}{2}$, 则 $h'(t) = t \cos \pi t - 1 < 0$, 所以, 函数 $y = h(t)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调

递减, 则 $g(t) = \sin \pi t - t \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, 又 $0 < \frac{1}{2k} < \frac{1}{2}$, 故 $\sin \frac{\pi}{2k} > \frac{1}{2k}$,

故 $f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\right) = e^{\frac{2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}}{2}} \sin \frac{\pi}{2k} - 1 > 2k \times \frac{1}{2k} - 1 = 0$

由 $f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\right) \times f\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2}\right) < 0$ 可知 $2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} < b_{2k} < 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$, $k \geq 2$,

综合 (i)、(ii) 和 (*) 可知, $\forall k \in N^*$, $2k\pi - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} < b_{2k} < 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$.

2.2 数列与不等式相结合

数列与不等式交汇主要以压轴题的形式出现, 试题还可能涉及到与导数、函数等知识综合一起考查. 主要考查知识重点和热点是数列的通项公式、前 n 项和公式以及二者之间的关系、等差数列和等比数列、归纳与猜想、数学归纳法、比较大小、不等式证明、参数取值范围的探求, 在不等式的证明中要注意放缩法的应用. 此类题型主要考查学生对知识的灵活变通、融合与迁移, 考查学生数学视野的广度和进一步学习数学的潜能. 近年来加强了对递推数列考查的力度, 这点应当引起我们高度的重视. 预计在高考中, 比较新颖的数列与不等式选择

题或填空题一定会出现. 数列解答题的命题热点是与不等式交汇, 呈现递推关系的综合性试题. 其中, 以函数与数列、不等式为命题载体, 有着高等数学背景的数列与不等式的交汇试题是未来高考命题的一个新的亮点, 而命题的冷门则是数列与不等式综合的应用性解答题.

例 1. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_6 > S_7 > S_5$, 给出下列五个命题: ① $d < 0$; ② $S_{11} > 0$; ③ $S_{12} < 0$; ④ 数列 $\{S_n\}$ 中的最大项为 S_{11} ; ⑤ $|a_6| < |a_7|$. 其中正确命题的是_____.

【答案】①②

【解析】因为 $S_6 > S_7 > S_5$, 所以 $a_7 < 0, a_6 > 0$, 所以公差 $d < 0$, 且 $a_6 + a_7 > 0$, 则由等差数列的前 n 项和公式与性质可得 $S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 11a_6 > 0$, 且 $S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = 12(a_6 + a_7) > 0, |a_6| > |a_7|$, 又等差数列的前 6 项为正数, 从第 7 项开始都是负数, 所以数列 $\{S_n\}$ 中的最大项为 S_6 , 因此正确命题是①②.

例 2. (2021·安徽淮南一模) 意大利数学家斐波那契以兔子繁殖数量为例引入数列 $\{a_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...,

该数列从第三项起, 每一项都等于前两项之和, 故此数列称为斐波那契数列, 通项公式为

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, 该通项公式又称为“比内公式”(法国数学家比内首先证明此公式), 是用

无理数表示有理数的一个范例. 设 n 是不等式 $\log_2 \left[(1+\sqrt{5})^x - (1-\sqrt{5})^x \right] > x+6$ 的正整数解, 则 n 的最小值为_____.

【答案】9

【解析】设 n 是不等式 $\log_2 \left[(1+\sqrt{5})^x - (1-\sqrt{5})^x \right] > x+6$ 的正整数解,

$\therefore \log_2 \left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \right] > n+6$, 即 $(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n > 2^{n+6}$, $\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n > 2^6$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] > \frac{2^6}{\sqrt{5}}$, 即 $a_n > \frac{2^6}{\sqrt{5}}$, 则 $a_n^2 > \frac{2^{12}}{5} = \frac{4096}{5}$,

又 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $a_8^2 = 21^2 < \frac{4096}{5} < 34^2 = a_9^2$, 故答案为: 9.

例 3. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, $a_n > 0$, 前 n 项和为 S_n , 若 $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \in N_+, n \geq 2$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 若数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{20} \leq T_n < \frac{3}{20}$.

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} 4, n=1 \\ 2n+1, n \geq 2 \end{cases} \quad \forall n \in N_+$ (2) 见证明

【解析】(1) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ ① $\because a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ② 且 $a_n > 0$,

$\therefore$ ①式 $\div$ ②式得: $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1 (n \geq 2)$, $\therefore$ 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 以 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = \sqrt{4} = 2$ 为首项, 公差为1的等差数列,

$$\therefore \sqrt{S_n} = 2 + (n-1) = n+1 \quad \therefore S_n = (n+1)^2$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$; 当 $n=1$ 时, $a_1 = 4$, 不满足上式,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 4, n=1 \\ 2n+1, n \geq 2 \end{cases} \quad \forall n \in N_+$.

(2) 由(1)知, $a_n = \begin{cases} 4, n=1 \\ 2n+1, n \geq 2 \end{cases} \quad \forall n \in N_+$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和,

$\because$ 当 $n=1$ 时, $T_n = \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{20}$, $\therefore$ 当 $n=1$ 时, $T_n = \frac{1}{20}$, 满足 $\frac{1}{20} \leq T_n < \frac{3}{20}$,

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{3}{20} - \frac{1}{4n+6} \end{aligned}$$

$\because$ 在 T_n 中, $n \geq 1, n \in N_+, \therefore 4n+6 \geq 10, \therefore \frac{1}{4n+6} \leq \frac{1}{10}, \therefore 0 > -\frac{1}{4n+6} \geq -\frac{1}{10}, \therefore \frac{1}{20} \leq \frac{3}{20} - \frac{1}{4n+6} < \frac{3}{20}$.

小结: 此类不等式的证明常用的方法: (1) 比较法; (2) 分析法与综合法, 一般是利用分析法分析, 再利用综合法分析; (3) 放缩法, 主要是通过分母分子的扩大或缩小、项数的增加与减少等手段达到证明的目的.

【反思提升】

综合上面的三种类型, 解决函数、数列、三角函数中的大小比较问题, 解答时首先要找准模型, 通过转化来解决, 一般情况下, 此类问题是几个知识点的交汇, 需综合不等式、函数等性质解题. 大小比较问题是函数、数列、三角函数的综合应用, 在近几年的高考试题中经常出现, 成为高考中的一个命题热点, 同时也是高中数学必修课中的几大内容之一, 解决大小问题不仅会用到函数的基本定义、单调性、奇偶性、周期性、有界性和图

象,同时,常常涉及到初等函数、不等式、方程、几何等方面问题;而且在解决一些不等式、数列等问题中也会用最值来求解.

专题 18 函数、不等式中恒成立问题

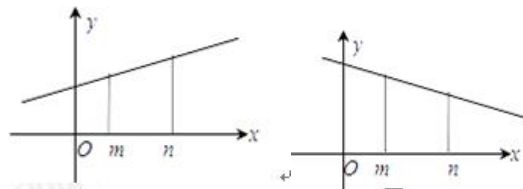
纵观近几年高考对于函数、不等式中恒成立问题的考查,重点是涉及到一次函数、二次函数的性质、不等式的性质及应用,图象渗透和换元、化归、数形结合、函数与方程、分类讨论、转化等数学思想方法.往往与导数相结合,在处理复杂问题时转化成为“恒成立问题”.解答这类题目应首先克服畏惧心理,通过总结高中阶段出现的这类问题的类型,形成完整的知识、方法体系,提高应对能力.

一、函数性质法

1. 一次函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$

若 $y = f(x)$ 在 $[m, n]$ 内恒有 $f(x) > 0$, 则根据函数的图象

可得 $\begin{cases} a > 0 \\ f(m) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$ 可合并成 $\begin{cases} f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$, 同理若 $y = f(x)$ 在 $[m, n]$ 内恒有 $f(x) < 0$ 则有 $\begin{cases} f(m) < 0 \\ f(n) < 0 \end{cases}$



例 1. (2021 江苏省天一中学高三模拟) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且 $f(-1) = -1$, 当 $a, b \in [-1, 1]$, 且 $a+b \neq 0$ 时, $(a+b)(f(a)+f(b)) > 0$ 成立, 若 $f(x) < m^2 - 2tm + 1$ 对任意的 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. $(-2, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【答案】B

【解析】 因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 当 $a, b \in [-1, 1]$, 且 $a+b \neq 0$ 时, $(a+b)(f(a)+f(b)) > 0$ 成立, 所以将 b 换为 $-b$, 可得 $(a-b)(f(a)-f(b)) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数,

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -f(-1) = 1$, 所以 $f(x) < m^2 - 2tm + 1$ 对任意的 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 等价于 $1 < m^2 - 2tm + 1$,

即 $2tm - m^2 < 0$ 对任意的 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 令 $g(t) = 2tm - m^2$, 则 $\begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -2m - m^2 < 0 \\ 2m - m^2 < 0 \end{cases}$,

解得 $m < -2$ 或 $m > 2$, 故选 B

【关键点睛】 此题考查函数的奇偶性和单调性, 含 3 个变量的不等式对 2 个变量恒成立求第三个变量取值范围的问题, 解题的关键是按顺序先对一个变量恒成立, 转化为求最值, 再对另一个变量恒成立, 转化为求最值即可, 考查数学转化思想

例 2. 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 满足条件: ① $f(-1+x) = f(-1-x)$; ② 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = x$ 只有一个公共点.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若不等式 $\pi^{f(x)} > \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2-tx}$ 在 $t \in [-2, 2]$ 时恒成立, 求实数 x 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$. (2) $(-\infty, -3 - \sqrt{5}) \cup (-3 + \sqrt{5}, +\infty)$.

【解析】 (1) $\because$ 由①知 $f(x) = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 的对称轴是直线 $x = -1$, $\therefore b = 2a$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = x$ 只有一个公共点, $\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y = ax^2 + bx, \\ y = x \end{cases}$ 有且只有一个解,

即 $ax^2 + (b-1)x = 0$ 有两个相同的实根, $\therefore \Delta = (b-1)^2 = 0$, 即 $b = 1$, $\therefore a = \frac{1}{2}$. $\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$.

(2) $\because \pi > 1$, $\therefore \pi^{f(x)} > \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2-tx}$ 等价于 $f(x) > tx - 2$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x > tx - 2$ 在 $t \in [-2, 2]$ 时恒成立 $\Leftrightarrow$ 函数

$g(t) = xt - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right) < 0$ 在 $t \in [-2, 2]$ 时恒成立,

$\therefore \begin{cases} g(2) < 0, \\ g(-2) < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2 - 2x + 4 > 0, \\ x^2 + 6x + 4 > 0, \end{cases}$ 解得 $x < -3 - \sqrt{5}$ 或 $x > -3 + \sqrt{5}$,

故实数 x 的取值范围是 $(-\infty, -3 - \sqrt{5}) \cup (-3 + \sqrt{5}, +\infty)$.

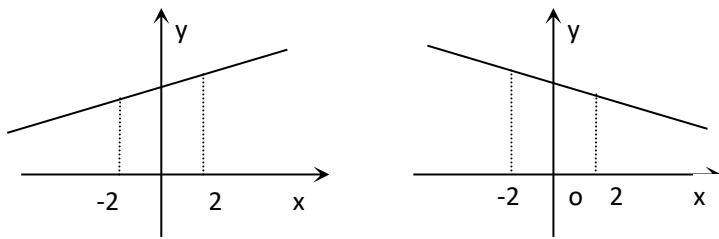
例 3. 对于满足 $|p| \leq 2$ 的所有实数 p , 则使不等式 $x^2 + px + 1 > 2p + x$ 恒成立的 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x < -1$ 或 $x > 3$.

【解析】 在不等式中出现了两个变量: x 、 p , 并且是给出了 p 的范围要求 x 的相应范围, 直接从 x 的不等式正面出发直接求解较难, 若逆向思维把 p 看作自变量, x 看成参变量, 则上述问题即可转化为在 $[-2, 2]$ 内关于 p 的一次函数函数值大于 0 恒成立求参变量 x 的范围的问题.

解: 原不等式可化为 $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$, 令 $f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$, 则原问题等价于

$f(p) > 0$ 在 $p \in [-2, 2]$ 上恒成立, 故有:



方法一: $\begin{cases} x-1 < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \therefore x < -1 \text{ 或 } x > 3.$

方法二: $\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x > 3 \text{ 或 } x < 1 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases} \therefore x < -1 \text{ 或 } x > 3.$

2. 二次函数——利用判别式、韦达定理及根的分布求解

有以下几种基本类型:

类型 1: 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

(1) $f(x) > 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a > 0$ 且 $\Delta < 0$;

(2) $f(x) < 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a < 0$ 且 $\Delta < 0$.

类型 2: 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

(1) 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} < \alpha \text{ 或 } \alpha \leq -\frac{b}{2a} \leq \beta \text{ 或 } -\frac{b}{2a} > \beta, \\ f(\alpha) > 0 \\ \Delta < 0 \\ f(\beta) > 0. \end{cases}$

$f(x) < 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) < 0, \\ f(\beta) < 0. \end{cases}$

(2) 当 $a < 0$ 时, $f(x) > 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) > 0, \\ f(\beta) > 0. \end{cases}$

$f(x) < 0$ 在 $x \in [\alpha, \beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} < \alpha \text{ 或 } \alpha \leq -\frac{b}{2a} \leq \beta \text{ 或 } -\frac{b}{2a} > \beta, \\ f(\alpha) < 0 \\ \Delta < 0 \\ f(\beta) < 0. \end{cases}$

例 1. (2021·安徽名校期末联考) 已知使不等式 $x^2 + (a+1)x + a \leq 0$ 成立的任意一个 x , 都满足不等式 $3x-1 \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

【答案】B

【解析】由题意， $3x-1 \leq 0$ ，得 $x \leq \frac{1}{3}$ ，由 $x^2 + (a+1)x + a \leq 0$ ，得 $(x+1)(x+a) \leq 0$ ，因为使不等式成立 $x^2 + (a+1)x + a \leq 0$ 的任意一个 x ，都满足不等式 $3x-1 \leq 0$ 。

①若 $a=1$ ，则 $(x+1)(x+a) \leq 0$ 的解集为 $\{-1\}$ ，满足 $\{-1\} \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ ，符合题意；

②若 $a < 1$ ，则 $(x+1)(x+a) \leq 0$ 的解集为 $[-1, -a]$ ，则 $[-1, -a] \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ ，故 $-a \leq \frac{1}{3}$ ，则 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$ ；

③若 $a > 1$ ，则 $(x+1)(x+a) \leq 0$ 的解集为 $[-a, -1]$ ，则 $[-a, -1] \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ ，故 $a > 1$ 。

综上有： a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ ，故选 B。

【名师点睛】本题考查了含参的一元二次不等式的解法问题，可先将给定式子十字相乘因式分解，根据一元二次不等式所对应的方程的根的大小分类讨论，写出解集。如若不能十字相乘分解，需要先对判别式与零的大小关系进行讨论，判别式大于等于零时，用求根公式求出对应方程的根，从而写出解集。

例 2. 设 $0 \leq \alpha \leq \pi$ ，不等式 $8x^2 - (8\sin \alpha)x + \cos 2\alpha \geq 0$ 对 $x \in R$ 恒成立，则 a 的取值范围为_____。

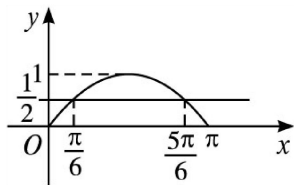
【答案】 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

【解析】不等式 $8x^2 - (8\sin \alpha)x + \cos 2\alpha \geq 0$ 对 $x \in R$ 恒成立，则有

$$\Delta = (8\sin \alpha)^2 - 4 \times 8 \cos 2\alpha = 64 \sin^2 \alpha - 32 \cos 2\alpha \leq 0, \quad \text{即}$$

$$2 \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha - (1 - 2 \sin^2 \alpha) = 4 \sin^2 \alpha - 1 \leq 0. \therefore \sin^2 \alpha \leq \frac{1}{4}. \therefore -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}, \text{ 又}$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ 结合下图可知, } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$



例 3. 已知当 $x \in (0, +\infty)$ 时，不等式 $9^x - m \cdot 3^x + m + 1 > 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, 2+2\sqrt{2})$

【解析】令 $3^x = t$ ，则当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $t \in (1, +\infty)$ ，记 $f(t) = t^2 - mt + m + 1 (t \in (1, +\infty))$ ，则由题意得 $f(t) = t^2 - mt + m + 1 (t \in (1, +\infty))$ 的图象恒在 x 轴的上方，可得 $\Delta = (-m)^2 - 4(m+1) < 0$ 或

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ \frac{m}{2} \leq 1, \\ f(1) = 1 - m + m + 1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } m < 2 + 2\sqrt{2}.$$

例 4. 设函数 $f(x) = x^2 - 1$, 对任意 $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $f\left(\frac{x}{m}\right) - 4m^2 f(x) \leq f(x-1) + 4f(m)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $m \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】依据题意得 $\frac{x^2}{m^2} - 1 - 4m^2(x^2 - 1) \leq (x-1)^2 - 1 + 4(m^2 - 1)$ 在 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上恒成立, 即

$$\frac{1}{m^2} - 4m^2 \leq -\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \text{ 在 } x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \text{ 上恒成立. 当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时函数 } y = -\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \text{ 取得最小值 } -\frac{5}{3}, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{m^2} - 4m^2 \leq -\frac{5}{3}, \text{ 即 } (3m^2 + 1)(4m^2 - 3) \geq 0, \text{ 解得 } m \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } m \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 5. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 1 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = 2$, 试求函数 $y = \frac{f(x)}{x} (x > 0)$ 的最小值;

(2) 对于任意的 $x \in [0, 2]$, 不等式 $f(x) \leq a$ 成立, 试求 a 的取值范围.

解: (1) 依题意得 $y = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} - 4$. 因为 $x > 0$, 所以 $x + \frac{1}{x} \geq 2$. 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 时,

即 $x = 1$ 时, 等号成立. 所以 $y \geq -2$. 所以当 $x = 1$ 时, $y = \frac{f(x)}{x}$ 的最小值为 -2 .

(2) 因为 $f(x) - a = x^2 - 2ax - 1$, 所以要使得“对任意的 $x \in [0, 2]$, 不等式 $f(x) \leq a$ 成立”

只要“ $x^2 - 2ax - 1 \leq 0$ 在 $[0, 2]$ 恒成立”. 不妨设 $g(x) = x^2 - 2ax - 1$,

则只要 $g(x) \leq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立即可. 所以 $\begin{cases} g(0) \leq 0, \\ g(2) \leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 - 0 - 1 \leq 0, \\ 4 - 4a - 1 \leq 0, \end{cases}$

解得 $a \geq \frac{3}{4}$. 则 a 的取值范围为 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

3. 其它函数:

对于恒成立的问题, 常用到以下结论:

(1) $a \geq f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a \geq f(x)_{\max}$;

(2) $a \leq f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a \leq f(x)_{\min}$;

(3) $f(x) > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > 0$ (注: 若 $f(x)$ 的最小值不存在, 则 $f(x) > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 的下界大于 0); $f(x) < 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < 0$ (注: 若 $f(x)$ 的最大值不存在, 则 $f(x) < 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 的上界小于 0).

例 1. (2021·江西重点中学协作体联考) 设 $k, b \in \mathbb{R}$, 若关于 x 的不等式 $\ln x + x \leq k(x+1) + b$ 在 $(0, +\infty)$ 上

恒成立, 则 $\frac{2k+b-2}{k-1}$ 的最小值是 ()

A. $-e^2$

B. $-\frac{1}{e+1}$

C. $-e+1$

D. $-e-1$

【答案】C

【分析】令 $f(x) = \ln x + x - k(x+1)$, 分析得出 $b \geq f(x)_{\max}$, 分 $k \leq 1$ 、 $k > 1$ 两种情况讨论, 可得出

$f(x)_{\max} = -\ln(k-1) - k - 1$, 进而可得出 $\frac{2k+b-2}{k-1} \geq 1 - \frac{\ln(k-1)+2}{k-1}$, 令 $t = k-1 > 0$, 利用导数求出函数

$g(t) = 1 - \frac{\ln t + 2}{t}$ 的最小值, 即可得解.

【解析】令 $f(x) = \ln x + x - k(x+1)$, 则 $f(x) \leq b$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 所以, $b \geq f(x)_{\max}$.

①当 $k \leq 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - k > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 无最大值, 不合乎题意;

②当 $k > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{k-1}$.

当 $0 < x < \frac{1}{k-1}$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x > \frac{1}{k-1}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调

递减, 所以, $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{k-1}\right) = \ln \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} - k\left(\frac{1}{k-1} + 1\right) = -\ln(k-1) - k - 1$, 即

$$b \geq -\ln(k-1) - k - 1,$$

$$\therefore \frac{2k+b-2}{k-1} = 2 + \frac{b}{k-1} \geq 2 - \frac{\ln(k-1) + k + 1}{k-1} = 1 - \frac{\ln(k-1) + 2}{k-1},$$

设 $t = k-1 > 0$, 令 $g(t) = 1 - \frac{\ln t + 2}{t}$, 则 $g'(t) = \frac{\ln t + 1}{t^2}$,

当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $g'(t) < 0$, 此时函数 $g(t)$ 单调递减; 当 $t > \frac{1}{e}$ 时, $g'(t) > 0$, 此时函数 $g(t)$ 单调递增.

所以, $g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e$, 因此, $\frac{2k+b-2}{k-1}$ 的最小值是 $1 - e$, 故选 C.

【结论点睛】利用参变量分离法求解函数不等式恒（能）成立，可根据以下原则进行求解：

$$(1) \forall x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\min};$$

$$(2) \forall x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\max};$$

$$(3) \exists x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\max};$$

$$(4) \exists x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\min}.$$

例 2. 已知不等式 $2x+m+\frac{8}{x-1}>0$ 对一切 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $(-10, +\infty)$

【解析】不等式 $2x+m+\frac{8}{x-1}>0$ 可化为 $2(x-1)+\frac{8}{x-1}>-m-2$,

$$\because x>1, \therefore 2(x-1)+\frac{8}{x-1} \geq 2\sqrt{2(x-1) \cdot \frac{8}{x-1}}=8, \text{ 当且仅当 } x=3 \text{ 时取等号.}$$

$\therefore$ 不等式 $2x+m+\frac{8}{x-1}>0$ 对一切 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, $\therefore -m-2<8$, 解得 $m>-10$.

例 3. 不等式 $x^2-2x+5 \geq a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围为()

A. $[-1, 4]$

B. $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$

C. $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

D. $[-2, 5]$

【答案】A

【解析】 $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ 的最小值为 4, 所以 $x^2-2x+5 \geq a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立, 只需 $a^2-3a \leq 4$, 解得 $-1 \leq a \leq 4$.

二、分离参数法

若所给的不等式能通过恒等变形使参数与主元分离于不等式两端，从而问题转化为求主元函数的最值，进而求出参数范围. 利用分离参数法来确定不等式 $f(x, \lambda) \geq 0$ ($x \in D$, λ 为实参数) 恒成立中参数 λ 的取值范围的基本步骤：

(1) 将参数与变量分离，即化为 $g(\lambda) \geq f(x)$ (或 $g(\lambda) \leq f(x)$) 恒成立的形式；

(2) 求 $f(x)$ 在 $x \in D$ 上的最大 (或最小) 值；

(3) 解不等式 $g(\lambda) \geq f(x)_{\max}$ (或 $g(\lambda) \leq f(x)_{\min}$)，得 λ 的取值范围.

适用题型：(1) 参数与变量能分离；(2) 函数的最值易求出.

例 1. (2021 四川省阆中东风中学校高三月考 (文)) 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x$, $g(x) = 2\ln x + 2$,

若对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立，则整数 a 的最小值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B**【解析】** $f(x) \geq g(x)$ 即为 $ax^2 + 2(a-1)x \geq 2\ln x + 2$, $a(x^2 + 2x) \geq 2\ln x + 2x + 2$,因为 $x > 0$, 所以 $a \geq \frac{2(\ln x + x + 1)}{x^2 + 2x}$, 即 $a \geq \frac{2(\ln x + x + 1)}{x^2 + 2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.设 $h(x) = \frac{2(\ln x + x + 1)}{x^2 + 2x}$, 则 $h'(x) = -\frac{2(x+1)(x+2\ln x)}{(x^2 + 2x)^2}$,令 $p(x) = x + 2\ln x$, 则 $p(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $p(1) = 1 > 0$, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2\ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \frac{1}{2} - \ln 4 < 0$, 所以 $p(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上存在唯一零点 x_0 , 即 $p(x_0) = x_0 + 2\ln x_0 = 0$, $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 所以 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增, $x > x_0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(x_0) = \frac{2\ln x_0 + 2x_0 + 2}{x_0^2 + 2x_0} = \frac{x_0 + 2}{x_0^2 + 2x_0} = \frac{1}{x_0}$, 所以 $a \geq \frac{1}{x_0}$, 又 $\frac{1}{x_0} \in (1, 2)$, 所以 a 的最小整

数值为 2, 故选 B.

【关键点点睛】 本题考查不等式恒成立问题, 解题方法用分离参数法变形为求函数最大值, 在求函数最大值时, 导函数的零点需要定性分析, 估计出范围, 利用零点求出函数的最大值, 再得出最大值的范围, 然后得出所求结论.例 2. 设函数 $f(x) = ax^2 - 2x + 2$, 对于满足 $1 < x < 4$ 的一切 x 值, 都有 $f(x) > 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.**【答案】** $a > \frac{1}{2}$ **【解析】** 由 $f(x) > 0$, 即 $ax^2 - 2x + 2 > 0$, $x \in (1, 4)$, 得 $a > -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立.令 $g(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $\therefore g(x)_{\max} = g(2) = \frac{1}{2}$,所以要使 $f(x) > 0$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立, 只要 $a > \frac{1}{2}$ 即可.例 3. 已知 $a > 0, b > 0$, 若不等式 $\frac{m}{3a+b} \leq \frac{3}{a} + \frac{1}{b}$ 恒成立, 则 m 的最大值为_____.**【答案】16****【解析】** 不等式 $\frac{m}{3a+b} - \frac{3}{a} - \frac{1}{b} \leq 0$ 恒成立, 即为 $m \leq (3a+b)\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) (a, b > 0)$,

由 $(3a+b)(\frac{3}{a}+\frac{1}{b})=10+\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}\geq 10+2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{3b}{a}}=16$, 当且仅当 $\frac{3a}{b}=\frac{3b}{a}$, 即 $a=b$, 取得等号,

即有 $m\leq 16$, 则 m 的最大值为 16, 故答案为 16.

三、主参换位——反客为主法

某些含参不等式恒成立问题, 在分离参数会遇到讨论的麻烦或者即使能容易分离出参数与变量, 但函数的最值却难以求出时, 可考虑变换思维角度“反客为主”, 即把习惯上的主元变与参数变量的“地位”交换一下, 变个视角重新审查恒成立问题, 往往可避免不必要的分类讨论或使问题降次、简化, 起到“山穷水尽疑无路, 柳暗花明又一村”的出奇制胜的效果.

例 1. 对于 $0\leq m\leq 4$ 的任意 m , 不等式 $x^2+mx>4x+m-3$ 恒成立, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -1)\cup(3, +\infty)$

【解析】不等式可化为 $m(x-1)+x^2-4x+3>0$ 在 $0\leq m\leq 4$ 时恒成立. 令 $f(m)=m(x-1)+x^2-4x+3$. 则

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(4)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \text{ 或 } x>3 \\ x<-1 \text{ 或 } x>1 \end{cases}, \text{ 即 } x<-1 \text{ 或 } x>3.$$

例 2. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若对于任意 $x\in[m, m+1]$, 都有 $f(x)<0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

【解析】由题意可得 $f(x)<0$ 对于 $x\in[m, m+1]$ 上恒成立, 即 $\begin{cases} f(m)=2m^2-1<0 \\ f(m+1)=2m^2+3m<0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$.

例 3. 对任意 $m\in[-1, 1]$, 函数 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$ 的值恒大于零, 求 x 的取值范围.

【答案】 $(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$

【解析】由 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m=(x-2)m+x^2-4x+4$, 令 $g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$, 则原问题转化为关于 m 的一次函数问题. 由题意知在 $[-1, 1]$ 上, $g(m)$ 的值恒大于零,

$$\therefore \begin{cases} g(-1)=(x-2)\times(-1)+x^2-4x+4>0, \\ g(1)=(x-2)+x^2-4x+4>0, \end{cases} \quad \text{解得 } x<1 \text{ 或 } x>3.$$

故当 x 的取值范围是 $(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$ 时, 对任意的 $m\in[-1, 1]$, 函数 $f(x)$ 的值恒大于零.

四、数形结合

若所给不等式进行合理的变形化为 $f(x)\geq g(x)$ (或 $f(x)\leq g(x)$) 后, 能非常容易地画出不等号两边函数的图象, 则可以通过画图直接判断得出结果. 尤其对于选择题、填空题这种方法更显方便、快捷.

例 1. 若关于 x 的不等式 $4a^{x-1}<3x-4(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 对于任意的 $x>2$ 恒成立, 则 a 的取值范围是()

A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

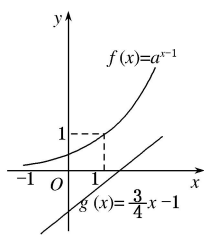
D. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

C. $[2, +\infty)$

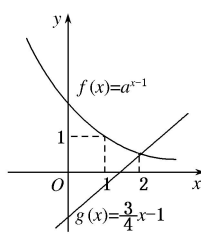
D. $(2, +\infty)$

【答案】B

【解析】不等式 $4a^{x-1} < 3x - 4$ 等价于 $a^{x-1} < \frac{3}{4}x - 1$. 令 $f(x) = a^{x-1}$, $g(x) = \frac{3}{4}x - 1$. 当 $a > 1$ 时, 在同一平面直角坐标系中作出两个函数的图象, 如图①所示, 由图知不满足条件; 当 $0 < a < 1$ 时, 在同一平面直角坐标系中作出两个函数的图象, 如图②所示. 则 $f(2) \leq g(2)$, 即 $a^{2-1} \leq \frac{3}{4} \times 2 - 1$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$, 所以 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.



图①



图②

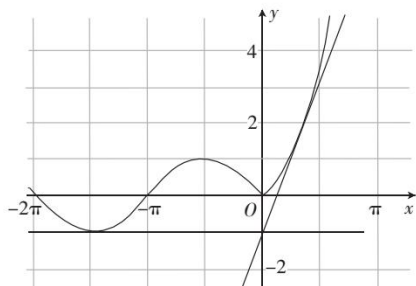
例 2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) \geq ax - 1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[0, +\infty)$ B. $[0, e]$ C. $[0, 1]$ D. $[e, +\infty)$

【答案】B

【解析】由题意可以作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = ax - 1$ 的图象, 如图所示. 若不等式 $f(x) \geq ax - 1$ 恒成立, 必有 $0 \leq a \leq k$, 其中 k 是 $y = e^x - 1$ 过点 $(0, -1)$ 的切线斜率. 设切点为 $(x_0, e^{x_0} - 1)$, 因为 $y' = e^x$, 所以

$$k = e^{x_0} = \frac{(e^{x_0} - 1) - (-1)}{x_0 - 0}, \text{ 解得 } x_0 = 1, \text{ 所以 } k = e, \text{ 故 } 0 \leq a \leq e$$



例 3. (2021·兴义市第二高级中学高三期末(理)) 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = \frac{1}{2}f(x)$, 当 $x \in [0, 2)$

$$\text{时, } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -2 \left| x - \frac{3}{2} \right|, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad \text{函数 } g(x) = x^3 + 3x^2 + m. \text{ 若 } \forall s \in [-4, -2), \exists t \in [-4, -2), \text{ 不等式 } f(s) - g(t) \geq 0$$

成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -12]$ B. $(-\infty, -4]$ C. $(-\infty, 8]$ D. $(-\infty, \frac{31}{2}]$

【答案】C

$$\text{【解析】} \because \text{当 } x \in [0, 2) \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -2 \left| x - \frac{3}{2} \right|, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \therefore x \in [0, 2), f(0) = \frac{1}{2} \text{ 为最大值,}$$

$$\because f(x+2) = \frac{1}{2} f(x), \therefore f(x) = 2f(x+2), \because x \in [-2, 0], \therefore f(-2) = 2f(0) = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$\because x \in [-4, -3], \therefore f(-4) = 2f(-2) = 2 \times 1 = 2, \because \forall s \in [-4, 2), \therefore f(x)_{\max} = 2, \therefore f(x) = 2f(x+2),$$

$$x \in [-2, 0], \therefore f(-\frac{1}{2}) = 2f(\frac{3}{2}) = 2 \times (-2) = -4, \because x \in [-4, -3], \therefore f(-\frac{5}{2}) = 2f(-\frac{1}{2}) = -8,$$

$$\because \forall s \in [-4, 2), \therefore f(s)_{\min} = -8, \because \text{函数 } g(x) = x^3 + 3x^2 + m, \therefore g'(x) = 3x^2 + 6x,$$

$$\text{由 } 3x^2 + 6x > 0 \text{ 解得 } x > 0 \text{ 或 } x < -2, \text{ 由 } 3x^2 + 6x < 0 \text{ 解得 } -2 < x < 0, \text{ 由 } 3x^2 + 6x = 0, x = 0 \text{ 或 } x = -2,$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) = x^3 + 3x^2 + m, \text{ 在 } (-\infty, -2), (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 在 } (-2, 0) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore \exists t \in [-4, -2), g(t)_{\min} = g(-4) = m - 16, \because \text{不等式 } f(s) - g(t) \geq 0, \therefore -8 \geq m - 16, \text{ 故实数满足: } m \leq 8,$$

故选 C.

【关键点点睛】若 $\forall s \in [-4, -2), \exists t \in [-4, -2), \text{ 不等式 } f(s) - g(t) \geq 0 \text{ 成立, 转化为 } f(s)_{\min} \geq g(t)_{\min}$, 再根据解析式及导数求出函数的最小值求解, 属于中档题.

五、消元转化法

例. (2021 山东聊城高三期中) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, $e^x \geq ax + b$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 ab 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{e}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{e}{2}$

【答案】D

【解析】若 $a < 0$, 则 $y = ax + b$ 单调递减, $y = e^x$ 单调递增, 不能满足且 $e^x \geq ax + b$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 故 $a \neq 0$.

若 $a = 0$, 则 $ab = 0$. 若 $a > 0$, 由 $e^x \geq ax + b$ 得 $b \leq e^x - ax$, 则 $ab \leq ae^x - a^2x$.

设函数 $f(x) = ae^x - a^2x$, $\therefore f'(x) = ae^x - a^2 = a(e^x - a)$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $e^x - a = 0$, 解得 $x = \ln a$,

当 $x < \ln a$ 时, $\therefore f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 递减; 当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 递增;

$\therefore$ 当 $x = \ln a$ 时, 函数 $f(x)$ 取最小值, $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln a) = a^2 - a^2 \ln a$.

设 $g(a) = a^2 - a^2 \ln a (a > 0)$, $g'(a) = a(1 - 2 \ln a) (a > 0)$, 由 $g'(a) = 0$ 得 $a = \sqrt{e}$,

当 $0 < a < \sqrt{e}$ 时, $g'(a) > 0$, 当 $a > \sqrt{e}$ 时, $g'(a) < 0$, $\therefore$ 当 $a = \sqrt{e}$ 时, $g(\sqrt{e})$ 取得最大值 $g(\sqrt{e}) = e - \frac{1}{2}e = \frac{e}{2}$.

$\therefore ab$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$, 故选 D.

【名师点睛】 不等式恒成立问题常见方法: ① 分离参数 $a \geq f(x)$ 恒成立 ($a \geq f(x)_{\max}$ 即可) 或 $a \leq f(x)$ 恒成立 ($a \leq f(x)_{\min}$ 即可); ② 数形结合 ($y = f(x)$ 图象在 $y = g(x)$ 上方即可); ③ 讨论最值 $f(x)_{\min} \geq 0$ 或 $f(x)_{\max} \leq 0$ 恒成立; ④ 讨论参数, 排除不合题意的参数范围, 筛选出符合题意的参数范围.

例 2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且 $f(1) = 1$, 若 $m, n \in [-1, 1], m + n \neq 0$ 时 $\frac{f(m) + f(n)}{m + n} > 0$, 若 $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$ 对于所有的 $x \in [-1, 1], a \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.

【答案】 $t \leq -2$ 或 $t \geq 2$ 或 $t = 0$

【解析】 本题不等式中有三个变量, 可以消元转换的策略, 先消去一个变量, 易得 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上最大值是 $f(1) = 1$, 问题可转化为 $t^2 - 2at + 1 \geq 1$ 对于所有的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 把问题的到转化.

解: 因为 $m, n \in [-1, 1], m + n \neq 0$ 时 $\frac{f(m) + f(n)}{m + n} > 0$ 所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 是增函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$

上最大值是 $f(1) = 1$, $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$ 对于所有的 $x \in [-1, 1], a \in [-1, 1]$ 恒成立, 即 $t^2 - 2at + 1 \geq 1$ 对

于所有的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, $t^2 - 2at \geq 0$ 对于所有的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 令 $g(a) = -t^2 + 2at$, 只

需满足 $\begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}$, 解得 $t \leq -2$ 或 $t \geq 2$ 或 $t = 0$.

六、应用导数研究恒成立问题

通过导数证明不等式或研究不等式恒成立问题的基本思路是: 以导函数和不等式为基础, 单调性为主线, 最(极)值为助手, 利用转化与化归思想, 从数形结合、分类讨论等多视角进行探究, 经常是把不等式问题转化为判断函数的单调性、求函数的最值, 利用最值得出相应结论, 其中分类讨论是经常用到的数学思想方法. 分离参数法、构造函数法是常用方法.

例 1. (2021 浙江绍兴高三月考) 已知 e 为自然对数的底数, a, b 为实数, 且不等式 $\ln x + (2e - a - 1)x + b + 1 \leq 0$

对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 则当 $\frac{b+2}{a+1}$ 取最大值时, a 的值为 ()

- A. $2e$ B. $2e-1$ C. $3e$ D. $3e-1$

【答案】D

【分析】先构造函数 $f(x) = \ln x + (2e - a - 1)x + b + 1$, 求出 $f'(x)$, 讨论确定出 $f(x)_{\max} \leq 0$ 得

$b \leq \ln(a+1-2e)$, 则有 $\frac{b+2}{a+1} \leq \frac{\ln(a+1-2e)+2}{a+1}$, 再构造函数 $g(t) = \frac{\ln(t-2e)+2}{t}$, 同样利用导数确定

出 $g(t)$ 的最大值, 从而得到 a 值.

【解析】设 $f(x) = \ln x + (2e - a - 1)x + b + 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2e - a - 1$,

当 $a \leq 2e - 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 不符合条件,

故 $a > 2e - 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a+1-2e}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a+1-2e}\right)$ 上递增, $\left(\frac{1}{a+1-2e}, +\infty\right)$ 上递减,

故有 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a+1-2e}\right) = \ln \frac{1}{a+1-2e} + b \leq 0$, 即 $b \leq \ln(a+1-2e)$, 则有 $\frac{b+2}{a+1} \leq \frac{\ln(a+1-2e)+2}{a+1}$,

令 $t = a+1, t > 2e$, $g(t) = \frac{\ln(t-2e)+2}{t}$, 则 $g'(t) = \frac{\frac{1}{t-2e} - \ln(t-2e) - 2}{t^2}$ 在 $(2e, +\infty)$ 上递减, 且 $g'(3e) = 0$,

所以 $g(t)$ 在 $(2e, 3e)$ 上递增, $(3e, +\infty)$ 上递减, 所以 $g(t) \leq g(3e)$, 此时 $\frac{b+2}{a+1}$ 取得最大值, 且 $a+1 = 3e$,

所以 $a = 3e - 1$, 故选 D.

【关键点睛】本题的关键也就是难点是能够两次构造函数, 利用导数求出相应函数的最值.

例 2. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $x \in [1, e]$.

(1) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的最大值. (2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $e+1; \left[-\infty, -\frac{1}{e}\right]$.

【解析】(1) 若 $a = 1$, 则 $f(x) = x + \ln x$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$.

因为 $x \in [1, e]$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上为增函数, 所以 $f(x)_{\max} = f(e) = e + 1$.

(2) 因为 $f(x) \leq 0$ 即 $ax + \ln x \leq 0$ 对 $x \in [1, e]$ 恒成立, 所以 $a \leq -\frac{\ln x}{x}$, $x \in [1, e]$.

令 $g(x) = -\frac{\ln x}{x}$, $x \in [1, e]$, 则 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$,

因为 $x \in [1, e]$, 所以 $g'(x) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上递减,

所以 $g(x)_{\min} = g(e) = -\frac{1}{e}$, 所以 $a \leq -\frac{1}{e}$. 即 a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right]$.

例 3. 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$ (e 是自然对数的底数).

(1) 求证: $e^x \geq x + 1$;

(2) 若不等式 $f(x) > ax - 1$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围.

【答案】(1) 将解析; (2) $(0, e - 1)$.

【解析】(1) 由题意知, 要证 $e^x \geq x + 1$, 只需证 $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$,

求导得 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = e^x - 1 > 0$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = e^x - 1 < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 是增函数, 在 $x \in (-\infty, 0)$ 时是减函数,

即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时取最小值 $f(0) = 0$, $\therefore f(x) \geq f(0) = 0$,

即 $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$, $\therefore e^x \geq x + 1$.

(2) 不等式 $f(x) > ax - 1$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恒成立, 即 $e^x - x - 1 > ax - 1$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恒成立,

亦即 $a < \frac{e^x - x}{x}$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恒成立, 令 $g(x) = \frac{e^x - x}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$,

以下求 $g(x) = \frac{e^x - x}{x}$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上的最小值, $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, $g'(x) \leq 0$,

当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) \geq 0$, $\therefore$ 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x)$ 单调递增,

$\therefore g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值为 $g(1) = e - 1$, $\therefore$ 正数 a 的取值范围是 $(0, e - 1)$.

【反思提升】

上述例子剖析了数学高考中恒成立问题的常见题型及解法, 解决这类题目要看清式子的特征, 选择合适的方法, 以便事半功倍. (1) 对于含二次项恒成立的问题, 注意讨论二次项系数是否为 0, 这是容易漏掉的地方. (2) 恒成立问题一般需转化为最值, 利用单调性证明在闭区间的单调性. (3) 一元二次不等式在 R 上恒成立, 看开口方

向和判别式. (4)含参数的一元二次不等式在某区间内恒成立的问题通常有两种处理方法: 一是利用二次函数在区间上的最值来处理; 二是分离参数, 再去求函数的最值来处理, 一般后者比较简单. (5) 值得一提的是, 各种类型各种方法并不是完全孤立的, 虽然方法表现的形式不尽相同, 但其实质却往往与求函数的最值息息相关, 从而在解数学函数与不等式恒成立的过程中, 欣赏一下数学中的“统一美”, 在努力攀登知识的高峰中, 不要忘了多看身边的美景, 度过有意义的时光.

专题 19 数列中的最值问题

数列中的最值问题在高考中出现的频率较高, 注意考查: 等差数列前 n 项和的最值问题和数列与函数、不等式的结合. 等差数列前 n 项和的最值问题是高考考查的热点之一, 考查形式为选择或填空小题, 也可以是解答题的一个小题, 是中档题; 数列与函数、不等式的结合, 是高考考查的重点和热点, 重点考查利用数列的相关知识和函数、不等式知识求数列的最值或已知不等式成立求参数取值范围或是证明不等式, 为解答题的一个小题, 难度为中档偏上试题.

一、等差数列中的最值问题

求等差数列前 n 项和的最值问题的方法:

(1) 二次函数法: 将 S_n 看成关于 n 的二次函数, 运用配方法, 借助函数的单调性及数形结合思想, 使问题得到解决, 注意项数 n 是正整数这一条件.

(2) 通项公式法: 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求前 n 项和的最值时,

$$\textcircled{1} \text{ 若 } a_1 > 0, d < 0, \text{ 且满足 } \begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}, \text{ 则前 } n \text{ 项和 } S_n \text{ 最大};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } a_1 < 0, d > 0, \text{ 且满足 } \begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}, \text{ 则前 } n \text{ 项和 } S_n \text{ 最小}.$$

(3) 不等式法: 借助 S_n 取最大值时, 有 $\begin{cases} S_n \geq S_{n-1} \\ S_n \geq S_{n+1} \end{cases} (n \geq 2, n \in N^*)$, 解此不等式组确定 n 的范围, 进而

确定 n 的值和对应 S_n 的值 (即为 S_n 的最值).

例 1. (2021·山西吕梁一模(文)) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_5 = 2$, $S_4 = 28$, 则 $S_n < 0$ 时, n 的最小值为 ()

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

【答案】C

【解析】等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 2$, $S_4 = 28$, 故 $a_1 + 4d = 2$, $\frac{4(a_1 + a_4)}{2} = 28$, 即 $2a_1 + 3d = 14$,

解得 $a_1 = 10, d = -2$, 故 $S_n = n \times 10 + \frac{1}{2}n(n-1) \times (-2) = -n^2 + 11n = -n(n-11)$, $n \in \mathbf{N}^*$,

令 $S_n = -n(n-11) < 0$ 得, $n > 11$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 故 n 的最小值为 12, 故选 C.

例 2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_3 = 8, a_4 = 4$, 则前 n 项和 S_n 中最大的是 ()

A. S_3 B. S_4 或 S_5 C. S_5 或 S_6 D. S_6

【答案】B.

【解析】由已知 $d = a_4 - a_3 = 4 - 8 = -4$, $a_n = a_3 + (n-3)d = 8 + (n-3) \times (-4) = 20 - 4d$, 由

$a_n = 20 - 4n \geq 0$ 得 $n \leq 5$, 所以 $a_4 > 0$, $a_5 = 0$, $a_6 < 0$, 所以 $S_4 = S_5$ 是 S_n 中的最大值. 故选 B.

例 3. (2021·浙江温州期末) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 \geq 3$, $S_5 \leq 30$, 则 a_1 的最小值是 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】B

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由条件 $\begin{cases} a_2 = a_1 + d \geq 3 \\ S_5 = 5a_1 + 10d \leq 30 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} a_1 + d \geq 3 \\ a_1 + 2d \leq 6 \end{cases}$, 由不等式的性质可

得 $a_1 = 2(a_1 + d) - (a_1 + 2d) \geq 2 \times 3 - 6 = 0$, 故选 B.

二、数列与函数、不等式的结合中的最值问题

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最值, 主要是两种思路: ①研究数列 $a_n = f(n)$ 的项的情况, 判断 S_n 的最值; ②直接研究 S_n 的通项公式, 求 S_n 的最值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的最值, 主要有两种方法: ①从函数角度考虑, 利用函数 $y = f(x)$ 的性质, 求数列 $a_n = f(n)$ 的最值; ②利用数列离散的特点, 考察 $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_k \leq a_{k+1} \\ a_k \leq a_{k-1} \end{cases}$, 然后判断数列 $\{a_n\}$ 的最值情况.

(3) 对数列不等式相结合的最值问题, 往往借助于函数的性质 (如二次函数、“对号函数”、指数函数等) 或基本不等式.

例 1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中满足 $a_1 = 15$, $\frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 2$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 7 B. $2\sqrt{15} - 1$ C. 9 D. $\frac{27}{4}$

【答案】D

【解析】由题意知, $a_{n+1} - a_n = 2n$, $\therefore a_2 - a_1 = 2 \cdot 1, a_3 - a_2 = 2 \cdot 2, \dots, a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$, 将以上 n 个式子相加, 得 $a_n - a_1 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) = \frac{2(n-1)(1+n-1)}{2} = n^2 - n$, 所以 $a_n = n^2 - n + 15$,

$\therefore \frac{a_n}{n} = n + \frac{15}{n} - 1$, 令 $g(x) = x + \frac{15}{x} - 1$, $g'(x) = 1 - \frac{15}{x^2} = \frac{x^2 - 15}{x^2}$, 当 $x \in [0, 3]$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $x \in [4, +\infty)$, $g'(x) > 0$, $g(3) = 3 + 5 - 1 = 7$, $g(4) = 4 + \frac{15}{4} - 1 = \frac{27}{4}$, 故最小值 $\frac{27}{4}$, 故答案为 D.

例 2. (2021·黑龙江哈尔滨市·哈尔滨三中高三月考(理)) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $\frac{a_{n+1} + 1}{e^{a_n}} = 1$. 若 $a_{n+1} - ta_n + 1 \geq 0$ 恒成立, 则实数 t ()

- A. 最小值是 $2e - 1$ B. 最大值是 $e^2 - 1$
C. 最大值是 e D. 最小值是 e

【答案】C

【分析】作差 $a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - \ln(a_{n+1} + 1)$, 构造函数 $f(x) = x - \ln(x + 1)$, 利用导数知识可得 $a_{n+1} \geq a_n \geq a_1 = 1$,

将 $a_{n+1} - ta_n + 1 \geq 0$ 恒成立化为 $t \leq \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} = \frac{a_{n+1} + 1}{\ln(a_{n+1} + 1)}$ ($a_{n+1} \geq 1$) 恒成立, 构造函数 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ ($x \geq 2$), 利用导数知识求出 $g(x)$ 的最小值即可得解.

【解析】由 $\frac{a_{n+1} + 1}{e^{a_n}} = 1$ 得 $a_{n+1} + 1 = e^{a_n}$, 得 $a_2 = e^{a_1} - 1 = e - 1$, $a_n = \ln(a_{n+1} + 1)$, 所以

$a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - \ln(a_{n+1} + 1)$, 令 $f(x) = x - \ln(x + 1)$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ ($x > -1$),

当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

所以当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n = f(a_{n+1}) \geq 0$, 所以

$a_{n+1} \geq a_n \geq a_1 = 1$, 因为 $a_{n+1} - ta_n + 1 \geq 0$ 恒成立, 所以 $ta_n \leq a_{n+1} + 1$ 恒成立, 所以

$$t \leq \frac{a_{n+1}+1}{a_n} = \frac{a_{n+1}+1}{\ln(a_{n+1}+1)} \quad (a_{n+1} \geq 1) \text{ 恒成立, 令 } g(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (x \geq 2), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

令 $g'(x) < 0$ 得 $\ln x - 1 < 0$, 得 $0 < x < e$, 又 $x \geq 2$, 所以 $2 \leq x < e$,

令 $g'(x) > 0$ 得 $\ln x - 1 > 0$, 得 $x > e$, 所以 $g(x)$ 在 $[2, e)$ 上递减, 在 $(e, +\infty)$ 上递增, 所以当 $x = e$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $g(e) = e$, 所以 $t \leq e$, 即 t 的最大值为 e , 故选 C.

【结论点睛】本题考查不等式的恒成立与有解问题, 可按如下规则转化:

①若 $k \geq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 则 $k \geq f(x)_{\max}$;

②若 $k \leq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 则 $k \leq f(x)_{\min}$;

③若 $k \geq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解, 则 $k \geq f(x)_{\min}$;

④若 $k \leq f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解, 则 $k \leq f(x)_{\max}$;

例 3. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{2018} = a_{2016} + 2a_{2014}$, 若 $a_m a_n = 4a_1^2$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值等 ()

- A. 1 B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】C

【解析】∵ 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{2018} = a_{2016} + 2a_{2014}$, $a_{2014}q^4 = a_{2014}q^2 + 2a_{2014}$, ∵ $a_{2014} > 0$, ∴ $q^4 = q^2 + 2$ 解可得, $q^2 = 2$, ∴ $q = \sqrt{2}$, ∵ $a_m a_n = 4a_1^2$, $a_1^2 \times q^{n+m-2} = 4a_1^2$, $q^{m+n-2} = 4$, ∴ $m+n=6$,

则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{1}{6} \left(2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right) \geq \frac{2}{3}$, 当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{m}{n}$ 且 $m+n=6$ 即 $m=n=3$ 时取等号.

例 4. (2021·浙江绍兴期末) 已知 $a_1, a_2, \dots, a_5$ 为 1, 2, 3, 4, 5 的任意一个排列. 则满足: 对于任意 $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

都有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq na_1$ 的排列 $a_1, a_2, \dots, a_5$ 有 ()

- A. 49 个 B. 50 个 C. 31 个 D. 72 个

【答案】A

【解析】因为 $1+2+3+4+5=15$, 所以 $n=5$ 时, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15 \leq 5a_1$, 所以 $a_1 \geq 3$,

当 $a_1 = 5$ 时, 任意排列均满足题意; 共有 $A_4^4 = 24$ 个,

当 $a_1 = 4$ 时, 只要 $a_2 \neq 5$, 其他排列均满足题意; 共有 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ 个,

当 $a_1 = 3$ 时, a_2 只能取 1 或 2, 所有的情况如下: 排列 32145, 满足题意; 排列 31245, 满足题意; 排列 32154, 满足题意; 排列 31254, 满足题意; 排列 32415, 满足题意; 排列 31425, 满足题意; 排列 32451, 不满足题意; 排列 31452, 不满足题意; 排列 32514, 不满足题意; 排列 31524, 满足题意; 排列 32541, 不满足题意; 排列 31542, 不满足题意; 共 7 个满足题意. 综上, 满足题意的排列共有 $24 + 18 + 7 = 49$ 个, 故选 A.

【点睛】

解题的关键是根据题意, 先求得 a_1 的范围, 再进行分类讨论, 难点在于 $a_1 = 3$ 时, na_1 值较小, 需逐个检验 a_2, a_3, a_4 , 方可得答案.

三、数列中最大(小)项问题

例 1. (2021·北京高三开学考试) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = -5$, $a_3 = -1$. 记 $b_n = \frac{S_n}{a_n} (n = 1, 2, \dots)$,

则数列 $\{b_n\}$ 的 ()

- A. 最小项为 b_3 B. 最大项为 b_3 C. 最小项为 b_4 D. 最大项为 b_4

【答案】C

【解析】由题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_1 = -5$, $a_3 = -1$, 可得 $d = \frac{a_3 - a_1}{3 - 1} = \frac{-1 - (-5)}{2} = 2$,

所以 $a_n = -5 + (n - 1) \times 2 = 2n - 7$, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(-5 + 2n - 7)}{2} = n^2 - 6n$,

则 $b_n = \frac{S_n}{a_n} = \frac{n^2 - 6n}{2n - 7}$, 可得 $b_3 = \frac{3^2 - 6 \times 3}{2 \times 3 - 7} = 9$, $b_4 = \frac{4^2 - 6 \times 4}{2 \times 4 - 7} = -8$, 所以 $b_3 > b_4$, 可排除 A、D;

设 $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{2x - 7}, x \in [1, +\frac{7}{2}) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{(2x - 6)(2x - 7) - (x^2 - 6x) \times 2}{(2x - 7)^2} = \frac{2(x^2 - 7x + 21)}{(2x - 7)^2}$,

因为 $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 21 < 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[1, \frac{7}{2})$ 和 $(\frac{7}{2}, +\infty)$ 上都是单调递增函数,

即当 $n = 1, 2, 3$ 时, 数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 当 $n \geq 4, n \in \mathbb{N}^+$ 时, 数列 $\{b_n\}$ 也为递增数列, 其中

$b_1 = 1, b_2 = \frac{8}{3}, b_3 = 9, b_4 = -8, b_5 = -\frac{5}{3}, \dots$, 例如当 $n = 25$ 时, 可得 $b_{25} = \frac{475}{43} > b_3$, 所以 B 不正确, C 正确,

故选 C.

【点睛】数列与函数、不等式综合问题的求解策略:

(1) 已知数列的条件, 解决函数问题, 解决此类问题一把要利用数列的通项公式, 前 n 项和公式, 求和方法等对于式子化简变形, 注意数列与函数的不同, 数列只能看作是自变量为正整数的一类函数, 在解决问题时要注意这一特殊性;

2 (2) 解决数列与不等式的综合问题时, 若是证明题中, 则要灵活选择不等式的证明方法, 如比较法、综合法、分析法、放缩法等, 若是含参数的不等式恒成立问题, 则可分离参数, 转化为研究最值问题来解决.

例 2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (n+1) \left(\frac{10}{11}\right)^n$, 试问该数列中有没有最大项? 若有, 求出最大项和最大项的序号; 若没有, 请说明理由.

【解析】法一: $\because a_{n+1} - a_n = (n+2) \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{10}{11}\right)^n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \times \frac{9-n}{11},$

当 $n < 9$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 即 $a_{n+1} > a_n$;

当 $n = 9$ 时, $a_{n+1} - a_n = 0$, 即 $a_{n+1} = a_n$;

当 $n > 9$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$, 即 $a_{n+1} < a_n$,

$\therefore$ 该数列中有最大项, 为第 9、10 项, 且 $a_9 = a_{10} = 10 \times \left(\frac{10}{11}\right)^9$.

法二: 根据题意, 令 $\begin{cases} a_{n-1} \leq a_n, \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases} \quad (n \geq 2),$ 即 $\begin{cases} n \times \left(\frac{10}{11}\right)^{n-1} \leq (n+1) \left(\frac{10}{11}\right)^n, \\ (n+1) \left(\frac{10}{11}\right)^n \geq (n+2) \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}, \end{cases}$ 解得 $9 \leq n \leq 10$.

又 $n \in \mathbb{N}^*$, $\therefore n = 9$ 或 $n = 10$, $\therefore$ 该数列中有最大项, 为第 9、10 项, 且 $a_9 = a_{10} = 10 \times \left(\frac{10}{11}\right)^9$.

【反思提升】数列的综合问题涉及到的数学思想: 函数与方程思想(如: 求最值或基本量)、转化与化归思想(如: 求和或应用)、特殊到一般思想(如: 求通项公式)、分类讨论思想(如: 等比数列求和, 或)等. 已知数列的前 n 项和 s_n 的相关条件求数列通项公式的基本思路是两个: (1) 将和 s_n 转化为项 a_n , 即利用 $a_n = s_n - s_{n-1}$ 将和转化为项. (2) 可将条件看作是数列 $\{s_n\}$ 的递推公式, 先求出 s_n , 然后题目即转化为已知数列的前 n 项和 s_n , 求数列通项公式 a_n .

例 3. (2021·浙江绍兴市·绍兴一中高三期末) 已知公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$, 且 a_1, a_7, a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的最小项.

【答案】(1) $a_n = 2n - 11$; (2) 最小项为第 7 项为 $\frac{29}{7}$.

【解析】(1) 由题知: $a_7^2 = a_1 \cdot a_5$, 则 $(12 + a_1)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 8)$ 得: $a_1 = -9$, 即 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 11$.

(2) 当 $n \leq 5$ 时, $|a_n| = 11 - 2n$, $S_n = \frac{9+11-2n}{2} \times n = 10n - n^2$, 则 $\frac{S_n}{n} = \frac{10n - n^2}{n} = 10 - n$, 即 $n = 5$ 时,

$$\left(\frac{S_n}{n}\right)_{\min} = 5,$$

当 $n \geq 6$ 时, $a_n = 2n - 11$, $S_n = S_5 + \frac{1+2n-11}{2} \times (n-5) = n^2 - 10n + 50$, 则 $\frac{S_n}{n} = n + \frac{50}{n} - 10$,

$$\text{令 } f(x) = x + \frac{50}{x} - 10, x \geq 6, \quad f'(x) = 1 - \frac{50}{x^2} = \frac{x^2 - 50}{x^2},$$

当 $6 < x < 5\sqrt{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 5\sqrt{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(6, 5\sqrt{2})$ 上单调递减, 在 $(5\sqrt{2}, +\infty)$

上单调递增, 即 $n = 7$ 时, $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{\min} = \frac{29}{7}$, 最小项为第 7 项为 $\frac{29}{7}$.

【关键点睛】解决本题的关键在于先讨论 $a_n = 2n - 11$ 的正负, 从而确定 $\{a_n\}$ 的通项公式, 进而得出 S_n , 最后由二次函数的性质以及导数得出数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的单调性, 由此得出最小值.

专题 20 三角形中的不等和最值问题

新课标下高考数学题中以三角形中的不等和最值问题为载体, 不仅仅需要用到三角变换、正余弦定理, 往往还需要涉及基本不等式以及求函数值域; 纵观近几年高考对三角形的考查, 三角形中的不等和最值问题已成为高考命题的一个热点. 重点放在正余弦定理与三角函数性质、基本不等式和向量知识的结合上; 要求学生有较强的逻辑思维能力、三角恒等变形能力以及准确的计算能力, 才能顺利解答. 从实际教学来看, 这部分知识综合性大, 涉及知识面广, 学生解决感觉较困难, 分析原因, 除了这类题目本身有一定难度, 主要是学生的三角恒等变形能力普遍较弱, 还有就是没有形成解题的模式和套路, 以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理. 本文就高中阶段出现这类问题加以类型的总结和方法的探讨.

一、三角形中利用边角关系求范围

三角形中的不等关系主要有: 1. 任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边; 2. 任一角都大于 0° 而小于 180° , 任意两角之和也是大于 0° 而小于 180° ; 3. 设角 A 是一三角形的内角, 则 $0 < \sin A \leq 1$; 4. 在

锐角三角形中，任意两角之和也是大于 90° 而小于 180° ；5. 在同一三角形中大边对大角，大角对大边等等. 运用好这些不等关系，是解决与三角形有关问题的关键.

例. 钝角三角形的三边为 a ， $a+1$ ， $a+2$ ，其最大角不超过 120° ，则 a 的取值范围是 ()

- A. $0 < a < 3$ B. $\frac{3}{2} \leq a < 3$ C. $2 < a \leq 3$ D. $1 \leq a < \frac{5}{2}$

【答案】B

【解析】钝角三角形的三边分别是 a ， $a+1$ ， $a+2$ ，其最大内角不超过 120° ，

$$\begin{aligned} & a + (a+1) > a+2 \\ \therefore \begin{cases} 0 > \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a \cdot (a+1)} \geq -\frac{1}{2} \end{cases}, & \text{解得 } \frac{3}{2} \leq a < 3, \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

例. (2021·九龙坡区·重庆市育才中学高三月考) 定义平面凸四边形为平面上每个内角度数都小于 180° 的四边形. 已知在平面凸四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 135^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 2$ ，设 $CD = t$ ，则 t 的取值范围是 ()

- A. $[1, \sqrt{3}+3]$ B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}+3\right)$ C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}+1\right)$

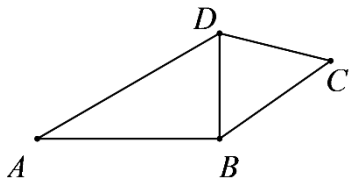
【答案】D

【解析】由余弦定理，知： $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos A = 3 + 4 - 6 = 1$ ， $\therefore BD = 1$ ，即在 $\triangle ABD$ 中

有 $\angle DBA = 90^\circ$ ，则 $\angle DBC = 45^\circ$ ，在 $\triangle DBC$ 中，由正弦定理： $\frac{t}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin C}$ ，整理得 $t = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin C}$ ，又由

凸四边形的定义知： $15^\circ < C < 135^\circ$ ， $\therefore$ 当 $\theta = 90^\circ$ 时，有最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；当 $\theta = 15^\circ$ 时，有最大值为 $\sqrt{3}+1$ (但

不能取等号)， $\therefore t$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}+1\right)$ ，故选 D.



二、三角形中利用辅助角公式求范围

例. (2021 河南郑州高三月考(文)) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $a = \sqrt{2}$ ， $A = \frac{3\pi}{4}$ ，若 $\lambda b + c$

有最大值, 则实数 λ 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

【解析】 由于 $A = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $0 < B < \frac{\pi}{4}$, 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{3\pi}{4}} = 2$,

所以 $b = 2\sin B$, $c = 2\sin C$,

所以 $\lambda b + c = 2\lambda \sin B + 2\sin C = 2\lambda \sin B + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - B\right)$

$= 2\lambda \sin B + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B\right) = (2\lambda - \sqrt{2})\sin B + \sqrt{2}\cos B$.

当 $2\lambda - \sqrt{2} = 0$, 即 $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\lambda b + c = \sqrt{2}\cos B$, 没有最大值, 所以 $\lambda \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $\lambda b + c = \sqrt{(2\lambda - \sqrt{2})^2 + 2} \cdot \sin(B + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda - \sqrt{2}}$, 要使 $\lambda b + c$ 有最大值, 则 $B + \varphi$ 要能取 $\frac{\pi}{2}$,

由于 $0 < B < \frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan \varphi > 1$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2\lambda - \sqrt{2}} > 1$, 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \lambda < \sqrt{2}$, 所以 λ 的取值范

围是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

【点睛】 解三角形的基本策略: 一是利用正弦定理实现“边化角”, 二是利用余弦定理实现“角化边”. 主要方法有两类, 一是找到边之间的关系, 利用基本不等式求最值, 二是利用正弦定理, 转化为关于某个角的函数, 利用函数思想求最值.

例. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $\cos 2C - \cos 2A = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right)$.

(1) 求角 A 的值; (2) 若 $a = \sqrt{3}$ 且 $b \geq a$, 求 $2b - c$ 的取值范围.

【解析】 (1) 由已知得 $2\sin^2 A - 2\sin^2 C = 2\frac{3}{4}\cos^2 C - \frac{1}{4}\sin^2 C$, 化简得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由题知, 若 $b \geq a$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$, 又 $a = \sqrt{3}$, 所以由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2$,

得 $b = 2\sin B$, $c = 2\sin C$, 故 $2b - c = 4\sin B - 2\sin C = 4\sin B - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$

$= 3\sin B - \sqrt{3}\cos B = 2\sqrt{3}\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $b \geq a$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq B < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6} \leq B - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$,

所以 $2\sqrt{3}\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$. 即 $2b - c$ 的取值范围为 $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

三、三角形中利用基本不等式求范围

例. (2021·浙江新高考测评) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{\tan A}$, 则 $\cos A$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$ C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ D. $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$

【答案】D

【解析】设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则由已知及正弦定理得

$\cos A = \sin A \left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) = \frac{\sin A \sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} = \frac{a^2}{bc}$, 由余弦定理知 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{bc}$, 所以

$3a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2}{3}}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{3bc} \geq \frac{2}{3}$, 又 $\cos A < 1$, 所以 $\cos A \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, 故选 D.

【关键点点睛】本题考查了正弦定理和余弦定理, 关键是将已知的正切式子, 通过正弦定理、余弦定理边角互化整理成 $\cos A = \frac{b^2 + c^2}{3bc}$, 再结合基本不等式即可求出取值范围.

例. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\sin\left(\frac{3}{2}B + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $a + c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围是 ()

- A. (2, 3] B. [3, 4) C. (4, 5] D. [5, 6)

【答案】B

【解析】因为 $\sin\left(\frac{3}{2}B + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且角 B 为三角形的内角, 所以 $\frac{3}{2}B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. 又 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a + c)^2 - 3ac = 4 - 3ac \geq 4 - 3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = 1$, 当且仅当 $a = c = 1$ 时, 取等号, 所以 $b \geq 1$, 所以 $a + c + b \geq 3$; 又 $a + c = 2 > b$, 所以 $a + c + b < 4$, 所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围是 $[3, 4)$.

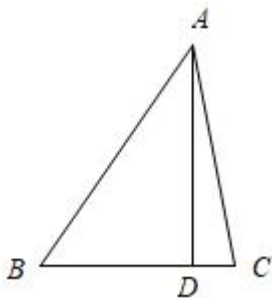
四、三角形中利用辅助角公式求最值

例. (2021·安徽芜湖高三期末(理)) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, BC 边上的高为 1, 则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 ()

- A. $2 - \sqrt{5}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $2 + \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{5}$

【答案】B

【解析】设 BC 边上的高为 AD ，则 $AD=1$ ， $AD \perp BC$ ，如图所示：



$$\text{所以 } \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{AB}, \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{AC}, \text{ 所以 } AB = \frac{1}{\sin B}, AC = \frac{1}{\sin C},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{4} AB \times AC = \frac{1}{4 \sin B \sin C},$$

$$\text{设 } y = 4 \sin B \sin C, \text{ 因为 } A = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } B + C = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{所以 } y = 4 \sin B \sin C = 4 \sin B \sin\left(\frac{5\pi}{6} - B\right) = 4 \sin B \left(\sin \frac{5\pi}{6} \cos B - \cos \frac{5\pi}{6} \sin B \right)$$

$$= 2 \sin B \cos B + 2\sqrt{3} \sin^2 B = \sin 2B - \sqrt{3} \cos 2B + \sqrt{3} = 2 \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3},$$

$$\text{因为 } B \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right), \text{ 所以 } 2B - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right], \text{ 则 } y = 2 \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \in (0, 2 + \sqrt{3}], \text{ 所以 } y_{\max} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 面积的最小值为 } \frac{1}{y_{\max}} = 2 - \sqrt{3}, \text{ 故选 B.}$$

【点睛】解题的关键是将题干条件，转化为 $y = 4 \sin B \sin C$ ，根据 B 的范围，结合三角函数的图象与性质求解，考查分析理解，计算求值的能力，属中档题。

例. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积，满足 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$ 。

(1) 求角 C 的大小；

(2) 求 $\sin A + \sin B$ 的最大值。

【解析】(1) 由题意可知 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ab \cos C$ ，所以 $\tan C = \sqrt{3}$ ，因为 $0 < C < \pi$ ，所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 。

$$(2) \text{ 由已知 } \sin A + \sin B = \sin A + \sin(\pi - C - A) = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$$

$$= \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A = \sqrt{3} \sin(A + \frac{\pi}{6}) \leq \sqrt{3}. \text{ 当 } \triangle ABC \text{ 为正三角形时取等号,}$$

所以 $\sin A + \sin B$ 的最大值是 $\sqrt{3}$.

例. (2021·黑龙江哈尔滨哈尔滨三中高三一模(文)) 在 $\triangle ABC$ 中, 记角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 面积为 S , 则 $\frac{S}{b^2 + 4ac}$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{16}$

【解析】 $\frac{S}{b^2 + 4ac} = \frac{\frac{1}{2}ac \sin B}{a^2 + c^2 - 2ac \cos B + 4ac} \leq \frac{\frac{1}{2}ac \sin B}{6ac - 2ac \cos B} = \frac{\sin B}{4(3 - \cos B)},$

令 $y = \frac{\sin B}{3 - \cos B}$, 则 $3y = \sin B + y \cos B = \sqrt{1 + y^2} \sin(B + \varphi)$, 故 $|3y| \leq \sqrt{1 + y^2}$, 故 $-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$,

又 $y > 0$, 故 $0 < y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$, 当且仅当 B 满足 $\frac{3\sqrt{2}}{4} = \sin B + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos B$ 时等号成立,

此时 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos B = \frac{1}{3}$, 故 $\frac{S}{b^2 + 4ac}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{16}$.

【点睛】方法总结: 对于形如 $y = \frac{a \sin x + b}{c \cos x + d}$ 的函数的值域, 可以用导数或辅助角公式来处理, 后者实际上是把函数的值域问题归结三角方程的有解问题.

五、三角形中利用基本不等式求最值

对于三角形中的最值, 很多时间同时也考查基本不等式, 不仅要注意正余弦定理的应用, 三角恒等变形,

同时还要注意构造使用基本不等式的条件, 以便使用基本不等式解决问题.

例. (2021·安徽高三一模(理)) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = c \sin B$, 则 $\tan A$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】 C

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a = c \sin B$ 及正弦定理得: $\sin A = \sin C \sin B$, $\therefore \sin(B + C) = \sin B \sin C$,

即 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin B \sin C$, 两边除以 $\sin B \sin C$ 可得 $\frac{1}{\tan C} + \frac{1}{\tan B} = 1$,

$\therefore 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\tan B \tan C}}$ ，即 $\tan B \tan C \geq 4$ ，当且仅当 $\tan B = \tan C = 2$ 等号成立，

$$\text{则 } \tan A = -\tan(B+C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = \frac{\tan B \tan C}{\tan B \tan C - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\tan B \tan C}},$$

则当 $\tan B \tan C = 4$ 时， $\tan A$ 取得最大值为 $\frac{4}{3}$ ，故选 C.

【点睛】本题考查正弦定理的应用，解题的关键是利用已知条件得出 $\frac{1}{\tan C} + \frac{1}{\tan B} = 1$ ，利用基本不等式求出 $\tan B \tan C \geq 4$.

例. (2021·广西梧州高三其他模拟(理)) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $\frac{\sin A - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{a}$ ， $b=3$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长的最大值是_____.

【答案】9

【解析】对已知等式进行角化边可得： $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ，

因为 $b=3$ ，所以 $a^2 + c^2 - 9 = ac$ ，即 $(a+c)^2 - 9 = 3ac$ ，因为 $a > 0$ ， $c > 0$ ，所以 $ac \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$ ，

所以 $(a+c)^2 - 9 \leq 3 \times \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$ ，即 $a+c \leq 6$ ，当且仅当 $a=c=3$ 时， $(a+c)_{\max} = 6$ ，所以 $(a+b+c)_{\max} = 9$ ，

即 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 9.

【关键点睛】解题关键是由基本不等式得到 $ac \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$ ，进而建立起关于 $a+c$ 的不等式，从而求出 $a+c$ 的范围，进而得解.

例. $\triangle ABC$ 在内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a = b \cos C + c \sin B$.

(I) 求 B ；(II) 若 $b=2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【解析】(I) 因为 $a = b \cos C + c \sin B$ ，所以由正弦定理得： $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \sin B$ ，

所以 $\sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \sin B$ ，

即 $\cos B \sin C = \sin C \sin B$ ，因为 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\tan B = 1$ ，解得 $B = \frac{\pi}{4}$ ；

(II) 由余弦定理得： $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{4}$ ，即 $4 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac$ ，由不等式得： $a^2 + c^2 \geq 2ac$ ，当且

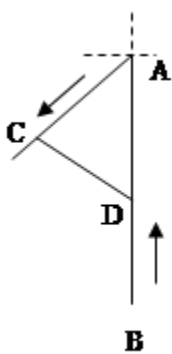
仅当 $a=c$ 时，取等号，所以 $4 \geq (2-\sqrt{2})ac$ ，解得 $ac \leq 4+2\sqrt{2}$ ，所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}ac \sin \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \times (4+2\sqrt{2}) = \sqrt{2}+1, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{2}+1.$$

六、三角形中利用二次函数求最值

对于三角形中的最值，不仅可能用到基本不等式来求解，很多时候也要用到三角函数的性质，或是求函数的最值的方法：如单调性法，导数法，图象法等等.

例. 甲船在 A 处. 乙船在甲船正南方向距甲船 20 海里的 B 处，乙船以每小时 10 海里的速度向正北方向行驶，而甲船同时以每小时 8 海里的速度由 A 处向南偏西 60° 方向行驶，问经过多少小时后，甲、乙两船相距最近？



【答案】 $\frac{70}{61}$ 小时后，甲乙两船相距最近.

【解析】 设经过 x 小时后，甲船和乙船分别到达 C, D 两点，则

$$AC = 8x, AD = AB - BD = 20 - 10x, \therefore$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 60^\circ = (8x)^2 + (20 - 10x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot (20 - 10x) \cdot \frac{1}{2} = 244x^2 + 560x + 400$$

$$= 244 \left(x - \frac{70}{61} \right)^2 + \frac{4800}{61} \therefore \text{当 } CD^2 \text{ 取得最小值时, } CD \text{ 取得最小值, } \therefore \text{当 } x = \frac{70}{61} \text{ 时, } CD \text{ 取得最小值, 此}$$

时，甲、乙两船相距最近.

例. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $a = b \tan A$ ，且 B 为钝角.

(1) 证明： $B - A = \frac{\pi}{2}$ ；(2) 求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围.

【答案】 (1) 详见解析；(2) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{8}]$.

【解析】(1) 由 $a = b \tan A$ 及正弦定理, 得 $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, $\therefore \sin B = \cos A$, 即 $\sin B = \sin(\frac{\pi}{2} + A)$,

又 B 为钝角, 因此 $\frac{\pi}{2} + A \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 故 $B = \frac{\pi}{2} + A$, 即 $B - A = \frac{\pi}{2}$; (2) 由 (1) 知, $C = \pi - (A + B)$

$$\pi - (2A + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2A > 0, \therefore A \in (0, \frac{\pi}{4}), \text{ 于是 } \sin A + \sin C = \sin A + \sin(\frac{\pi}{2} - 2A)$$

$$= \sin A + \cos 2A = -2\sin^2 A + \sin A + 1 = -2(\sin A - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}, \because 0 < A < \frac{\pi}{4}, \therefore 0 < \sin A < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此 $\frac{\sqrt{2}}{2} < -2(\sin A - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8} \leq \frac{9}{8}$, 由此可知 $\sin A + \sin C$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{8}]$.

七、三角形与平面向量相结合的最值问题

以向量为载体来描述三角形中的条件, 然后解三角形, 是近年来是常见高考题型, 这种题目不仅要求学生熟悉应用正余弦理解三角形, 同时还要求学生有不错的向量知识才能读懂题目, 从而顺利作答.

例. 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 1

【答案】C

【解析】 $\because \overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$,

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cos \theta + \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \theta = \sin(\theta + \varphi), \text{ 其中 } \tan \varphi = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \sin A = \cos(\theta + \varphi),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin A = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\theta + \varphi), \text{ 故当 } \cos(\theta + \varphi) = 1 \text{ 时, 即 } \theta + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ 时, } S_{\triangle ABC} \text{ 取最}$$

大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 故选 C.

例. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, |b| = 2$, 则 $|a+b| + |a-b|$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

【答案】 4 $2\sqrt{5}$

【解析】设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ , 由余弦定理有: $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \theta} = \sqrt{5 - 4\cos \theta}$,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos(\pi - \theta)} = \sqrt{5 + 4\cos \theta}, \text{ 则:}$$

$|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5+4\cos\theta} + \sqrt{5-4\cos\theta}$ ，令 $y = \sqrt{5+4\cos\theta} + \sqrt{5-4\cos\theta}$ ，则

$y^2 = 10 + 2\sqrt{25-16\cos^2\theta} \in [16, 20]$ ，据此可得：

$$\left(|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|\right)_{\max} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \left(|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|\right)_{\min} = \sqrt{16} = 4,$$

即 $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值是 4，最大值是 $2\sqrt{5}$ 。

例. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $b = a\cos C + \frac{1}{2}c$ 。

(1) 求角 A ；(2) 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$ ，求 a 的最小值。

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$ (2) $\sqrt{6}$

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 中， $b - a\cos C = \frac{c}{2}$ ， $\therefore$ 由正弦定理知， $\sin B - \sin A\cos C = \frac{1}{2}\sin C$ ， $\because A + B + C = \pi$ ，

$$\therefore \sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C, \therefore \sin A\cos C + \cos A\sin C - \sin A\cos C = \frac{1}{2}\sin C,$$

$$\therefore \cos A\sin C = \frac{1}{2}\sin C, \therefore \cos A = \frac{1}{2}, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由 (1) 及 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$ 得 $bc = 6$ ，所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 6 \geq 2bc - 6 = 6$

当且仅当 $b = c$ 时取等号，所以 a 的最小值为 $\sqrt{6}$

八、三角形与圆锥曲线相结合的最值问题

例. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，且 $|F_1F_2| = 2$ ，若 P 是该双曲线右支上一点，且满足 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，则 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值是 ()

- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 2

【答案】B

【解析】设 $|PF_1| = m$ ， $|PF_2| = n$ ， $\angle F_1PF_2 = \theta$ ，由题意得 $m = 2n$ ， $c = 1$ ，由双曲线定义得 $m - n = 2a$ ，

$$\therefore n = 2a, \text{ 所以 } 2a \geq c - a = 1 - a, \text{ 所以 } a \geq \frac{1}{3}, \text{ 所以 } n \geq \frac{2}{3}, \text{ 所以 } n^2 \geq \frac{4}{9},$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos \theta = \frac{m^2 + n^2 - 4c^2}{2mn} = \frac{5n^2 - 4}{4n^2},$$

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}mn \sin \theta = n^2 \sqrt{1 - \left(\frac{5n^2 - 4}{4n^2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{-9n^4 + 40n^2 - 16} = \frac{1}{4} \sqrt{-9\left(n^2 - \frac{20}{9}\right)^2 + \frac{256}{9}},$$

当 $n^2 = \frac{20}{9} > \frac{4}{9}$ 时, $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值是 $\frac{4}{3}$, 故选 B.

例. 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 已知点 A, B 为抛物线上的两个动点, 且满足 $\angle AFB = 60^\circ$, 过弦 AB 的中点 C 作该抛物线准线的垂线 CD , 垂足为 D , 则 $\frac{|AB|}{|CD|}$ 的最小值为

- A. $\sqrt{3}$ B. 1 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 2

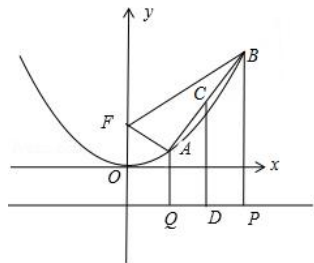
【答案】B

【解析】设 $|AF| = a, |BF| = b$, 由抛物线定义, 得 $|AF| = |AQ|, |BF| = |BP|$, 在梯形 $ABPQ$ 中, $\therefore 2|CD| = |AQ| + |BP| = a + b$. 由余弦定理得 $|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab$, 配方得, $|AB|^2 = (a+b)^2 - 3ab$,

又 $\because ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $\therefore (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2$ 得到 $|AB| \geq \frac{1}{2}(a+b) = |CD|$. $\therefore \frac{|AB|}{|CD|} \geq 1$,

即 $\frac{|AB|}{|CD|}$ 的最小值为 1. 故选 B.

【反思提升】综合上面的几种类型, 解决三解形中的不等与最值问题, 涉及到三角函数知识和较多的数学思想、方法; 解三角形主要知识是正、余弦定理, 同时三角恒等变形能力以及计算能力和按照目的进行分析问题、解决问题的能力要求也是比较高的; 不等关系和最值处理的常用方法: 利用三角形中的有关结论转化为基本不等式来解决或是转化为函数的最值来加以解决.



专题 21 几何体与球切、接的问题

讲高考

纵观近几年高考对于组合体的考查, 与球相关的外接与内切问题是高考命题的热点之一. 高考命题小题综合化倾向尤为明显, 要求学生有较强的空间想象能力和准确的计算能力, 才能顺利解答. 从实际教学来看, 这部分知识学生掌握较为薄弱、认识较为模糊, 看到就头疼的题目. 分析原因, 除了这类题目的入手确实不易之外, 主要是学生没有形成解题的模式和套路, 以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理. 下面结合近几年高考题对球与几何体的切接问题作深入的探究, 以便更好地把握高考命题的趋势和高考的命题思路, 力争在这部分内

容不失分. 从近几年全国高考命题来看, 这部分内容以选择题、填空题为主, 大题很少见.

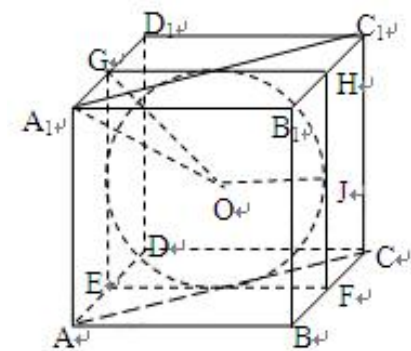
首先明确定义 1: 若一个多面体的各顶点都在一个球的球面上, 则称这个多面体是这个球的内接多面体, 这个球是这个多面体的外接球.

定义 2: 若一个多面体的各面都与一个球的球面相切, 则称这个多面体是这个球的外切多面体, 这个球是这个多面体的内切球.

1 球与柱体的切接

规则的柱体, 如正方体、长方体、正棱柱等能够和球进行充分的组合, 以外接和内切两种形态进行结合, 通过球的半径和棱柱的棱产生联系, 然后考查几何体的体积或者表面积等相关问题.

1.1 球与正方体



如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 设正方体的棱长为 a , E, F, H, G 为棱的中点, O 为球的球心. 常

见组合方式有三类: 一是球为正方体的内切球, 截面图为正方形 $EFGH$ 和其内切圆, 则 $|OJ| = r = \frac{a}{2}$; 二是与

正方体各棱相切的球, 截面图为正方形 $EFGH$ 和其外接圆, 则 $|GO| = R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; 三是球为正方体的外接球,

截面图为长方形 ACA_1C_1 和其外接圆, 则 $|A_1O| = R' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 通过这三种类型可以发现, 解决正方体与球的组

合问题, 常用工具是截面图, 即根据组合的形式找到两个几何体的轴截面, 通过两个截面图的位置关系, 确定好正方体的棱与球的半径的关系, 进而将空间问题转化为平面问题.

(1) 正方体的内切球, 如图 1. 位置关系: 正方体的六个面都与一个球都相切, 正方体中心与球心重合;

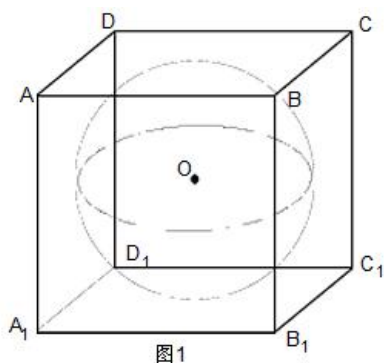


图1

数据关系：设正方体的棱长为 a ，球的半径为 r ，这时有 $2r = a$ 。

(2) 正方体的外接球，如图 2。位置关系：正方体的八个顶点在同一个球面上；正方体中心与球心重合；

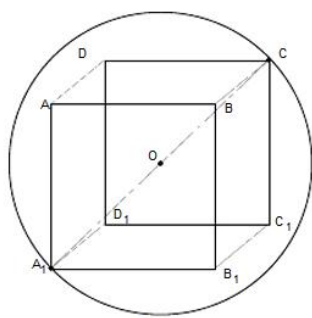


图2

数据关系：设正方体的棱长为 a ，球的半径为 r ，这时有 $2r = \sqrt{3}a$ 。

(3) 正方体的棱切球，如图 3。位置关系：正方体的十二条棱与球面相切，正方体中心与球心重合；

数据关系：设正方体的棱长为 a ，球的半径为 r ，这时有 $2r = \sqrt{2}a$ 。

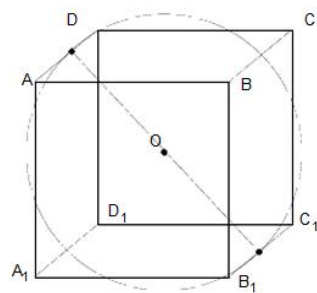


图3

例 1. (2021·江西景德镇市·高三期末(理)) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E 为棱 AA_1 的中点，

截面 CD_1E 交棱 AB 于点 F ，则四面体 $CDFD_1$ 的外接球表面积为 ()

A. $\frac{39\pi}{4}$

B. $\frac{41\pi}{4}$

C. 12π

D. $\frac{43\pi}{4}$

【答案】B

【分析】可证 F 为 AB 的中点，设 DD_1 的中点为 G ， $\triangle DFC$ 的外接圆的球心为 O_1 ，四面体 $CDFD_1$ 的外接球

的球心为 O ，连接 OG, OF, OO_1, A_1B ，利用解三角形的方法可求 $\triangle DFC$ 的外接圆的半径，从而可求四面体 $CDFD_1$ 的外接球的半径。

【解析】设 DD_1 的中点为 G ， $\triangle DFC$ 的外接圆的圆心为 O_1 ，四面体 $CDFD_1$ 的外接球的球心为 O ，

连接 OG, OF, OO_1, A_1B ，因为平面 $A_1ABB_1 \parallel$ 平面 D_1DCC_1 ，平面 $CD_1E \cap$ 平面 $A_1ABB_1 = EF$ ，

平面 $CD_1E \cap$ 平面 $D_1DCC_1 = D_1C$ ，故 $EF \parallel D_1C$ ，而 $A_1B \parallel D_1C$ ，故 $EF \parallel A_1B$ ，故 F 为 AB 的中点，

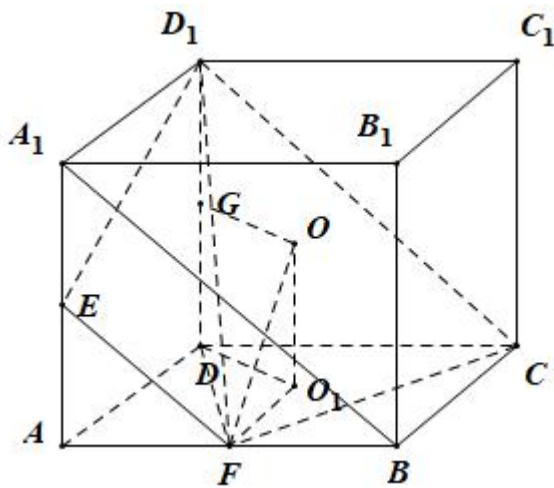
所以 $DF = CF = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ，故 $\cos \angle DFC = \frac{10-4}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$ ，

因为 $\angle DFC$ 为三角形的内角，故 $\sin \angle DFC = \frac{4}{5}$ ，故 $\triangle DFC$ 的外接圆的半径为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$ ，

$OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，故 $OO_1 \parallel DD_1$ ，在平面 GDO_1O 中， $OG \perp DD_1, O_1D \perp DD_1$ ，故

$OG \parallel O_1D$ ，故四边形 GDO_1O 为平行四边形，故 $OO_1 \parallel GD$ ， $OO_1 = GD$ ，所以四面体 $CDFD_1$ 的外接球的半

径为 $\sqrt{1 + \frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$ ，故四面体 $CDFD_1$ 的外接球表面积为 $4\pi \times \frac{41}{16} = \frac{41\pi}{4}$ ，故选 B。



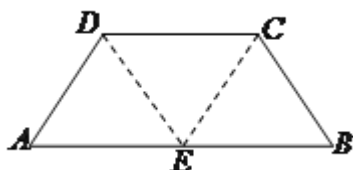
【点睛】方法点睛：三棱锥的外接球的球的半径，关键是球心位置的确定，通常利用“球心在过底面外接圆的圆心且垂直于底面的直线上”来确定。

例 2. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若球的体积为 $\frac{9\pi}{2}$ ，则正方体的棱长为_____。

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】设正方体棱长为 a ，球半径为 R ，则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{9\pi}{2}$ ， $\therefore R = \frac{3}{2}$ ， $\therefore \sqrt{3}a = 3$ ， $\therefore a = \sqrt{3}$ 。

例 3. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 2DC = 2, \angle DAB = 60^\circ$, E 为 AB 中点. 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED 、 EC 折起, 使 A 、 B 重合于点 P , 则三棱锥 $P-DCE$ 的外接球的体积为 ()

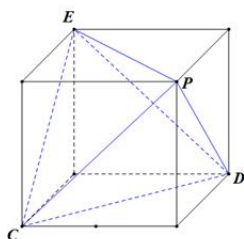


- A. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ B. $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$ D. $\frac{\sqrt{6}\pi}{24}$

【答案】C

【解析】由题意可知, 折叠所得的几何体是一个棱长为 1 的正四棱锥, 将其放入正方体如图所示, 由题意可得,

该三棱锥的外接球直径为: $\sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 外接球的体积: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}\pi}{8}$, 故选 C.



1.2 球与长方体

例 4. (2021·内蒙古包头市·高三期末(文)) 已知各顶点都在同一球面上的正四棱柱的底边长为 a , 高为 h , 球的体积为 $8\sqrt{6}\pi$, 则这个正四棱柱的侧面积的最大值为 ()

- A. $48\sqrt{2}$ B. $24\sqrt{2}$ C. $96\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

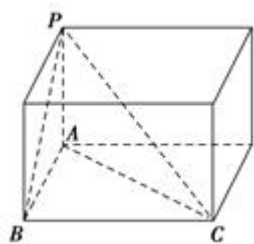
【答案】B

【解析】设球的半径为 R , 则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\sqrt{6}\pi$, 解得 $R = \sqrt{6}$, 所以 $a^2 + a^2 + h^2 = (2R)^2 = 4R^2$, 即 $2a^2 + h^2 = 24 \geq 2\sqrt{2a^2h^2} = 2\sqrt{2}ah$, 所以 $ah \leq 6\sqrt{2}$, 侧面积 $S = 4ah \leq 24\sqrt{2}$, 即侧面积的最大值为 $24\sqrt{2}$, 故选 B.

【点睛】与球有关的组合体问题, 一种是内切, 一种是外接. 解题时要认真分析图形, 明确切点和接点的位置, 确定有关元素间的数量关系, 并作出合适的截面图, 如球内切于正方体, 切点为正方体各个面的中心, 正方体的棱长等于球的直径; 球外接于长方体, 长方体的顶点均在球面上, 长方体的体对角线长等于球的直径.

例 5. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马; 将四个面都为直角三角

形的三棱锥称之为鳖臑. 若三棱锥 $PABC$ 为鳖臑, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=AB=2$, $AC=4$, 三棱锥 $PABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为()



- A. 8π B. 12π C. 20π D. 24π

【答案】C

【解析】将三棱锥 $PABC$ 放入长方体中, 如图, 三棱锥 $PABC$ 的外接球就是长方体的外接球. 因为 $PA=AB=2$, $AC=4$, $\triangle ABC$ 为直角三角形, 所以 $BC=3+2\sqrt{5}=2\sqrt{3+2\sqrt{5}}$. 设外接球的半径为 R , 依题意可得 $(2R)^2=2^2+2^2+(2\sqrt{3+2\sqrt{5}})^2=20$, 故 $R^2=5$, 则球 O 的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$. 故选 C.

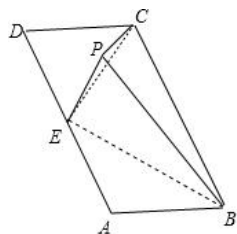
例 6. 已知矩形 $ABCD$, $AB=1$, $AD=\sqrt{2}$, E 为 AD 的中点, 现分别沿 BE , CE 将 $\triangle ABE$, $\triangle DCE$ 翻折, 使点 A, D 重合, 记为点 P , 则几何体 $P-BCE$ 的外接球表面积为_____.

【答案】 $\frac{5\pi}{2}$

【解析】由 $AB=1$, $AD=\sqrt{2}$, E 为 AD 中点, 可得 $PE=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $PB=PC=1$, 得

$\angle EPB=\angle EPC=90^\circ$, $\angle CPB=90^\circ$, $\therefore P-BCE$ 为长方体一角, 其外接球直径为其体对角线长, $\therefore$

$2R=\sqrt{PE^2+PC^2+PB^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\therefore R=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\therefore$ 外接球表面积为 $4\pi R^2=\frac{5\pi}{2}$, 故答案为: $\frac{5\pi}{2}$.



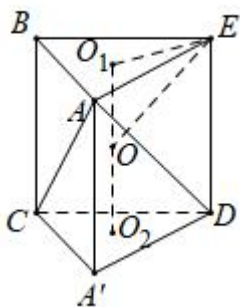
1.3 球与正三棱柱

例 7. (2021·安徽池州市·高三期末(理)) 已知四棱锥 $A-BCDE$ 的底面 $BCDE$ 是边长为 2 的正方形, $DE \perp$ 平面 ABE , $AE=2$, $AC=2\sqrt{2}$, 则四棱锥 $A-BCDE$ 的外接球的表面积为_____.

【答案】 $\frac{28\pi}{3}$

【分析】易知三角形 ABE 为正三角形，又 $DE \perp$ 平面 ABE ，构造正三棱柱，则球心为其上下底面中心连线的中点，求得半径，代入球的表面积公式求解.

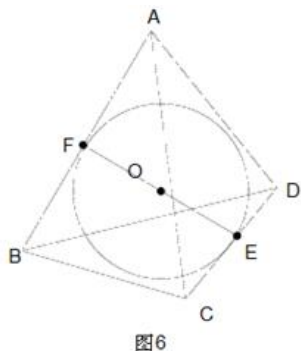
【解析】如图所示， $\because DE \perp$ 平面 ABE ， $BC \perp$ 平面 ABE ， $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，则有 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ，解得 $AB = 2$ ，又 $AE = 2$ ，构造正三棱柱 $ABE - A'CD$ ，其上下底面边长为 2，高为 2，则其外接球的球心是上下中心连线的中点，设外接球半径 R ，则 $R^2 = O_1E^2 + OO_1^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{7}{3}$ ，所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = \frac{28\pi}{3}$.



例 8. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上”，若 $AB=3$ ， $AC=4$ ， $AB \perp AC$ ， $AA_1=12$ ，求球 O 的半径.

【答案】 $\frac{13}{2}$.

【解析】设球的半径为 R ，因为直三棱柱中 $AB=3$ ， $AC=4$ ， $AA_1=12$ ， $AB \perp AC$ ，所以 $BC=5$ ，且 BC 为过底面 ABC 的截面圆的直径. 取 BC 中点 D ，则 $OD \perp$ 底面 ABC ，则 O 在侧面 BCC_1B_1 内，矩形 BCC_1B_1 的对角线长即为球直径，所以 $2R = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ，即 $R = \frac{13}{2}$.



例 9. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有顶点都在半径为 1 的球面上，当正三棱柱的体积最大时，该正三棱柱

的高为_____.

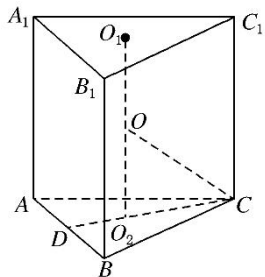
【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】作出正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 如图所示, 由题意知, 球心 O 为两底面 $ABC, A_1B_1C_1$ 的中心 O_1, O_2 的连

线的中点, 设三棱柱的高 $O_1O_2=h$, 因为球的半径 $OC=1$, 所以在 $\text{Rt}\triangle OO_2C$ 中, 有 $O_2C=\sqrt{1-\left(\frac{h}{2}\right)^2}$, 所以

$CD=\frac{3}{2}O_2C, AB=\frac{2}{\sqrt{3}}CD=\sqrt{3}O_2C$, 所以 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD\cdot O_1O_2=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{h}{2}\right)^2}\times\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{h}{2}\right)^2}\cdot h=$

$\frac{3\sqrt{3}}{16}(-h^3+4h)$, 易知当 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, 三棱柱的体积取得最大值.



2 球与锥体的切接

规则的锥体, 如正四面体、正棱锥、特殊的一些棱锥等能够和球进行充分的组合, 以外接和内切两种形态进行结合, 通过球的半径和棱锥的棱和高产生联系, 然后考查几何体的体积或者表面积等相关问题.

2.1 正四面体与球的切接问题

(1) 正四面体的内切球, 如图 4. 位置关系: 正四面体的四个面都与一个球相切, 正四面体的中心与球心重合;

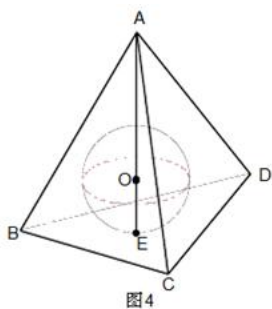


图4

数据关系: 设正四面体的棱长为 a , 高为 h ; 球的半径为 R , 这时有

$$4R = h = \frac{\sqrt{6}}{3}a; \text{ (可以利用体积法证明)}$$

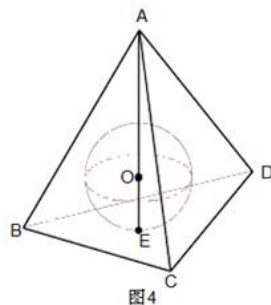


图4

(2) 正四面体的外接球, 如图 5. 位置关系: 正四面体的四个顶点都在一个球面上, 正四面体的中心与球心重合;

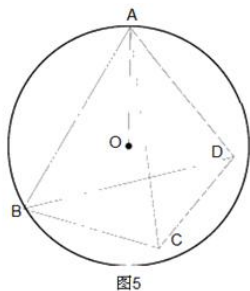


图5

数据关系：设正四面体的棱长为 a ，高为 h ；球的半径为 R ，这时有 $4R = 3h = \sqrt{6}a$ ；（可用正四面体高 h 减去内切球的半径得到）

（3）正四面体的棱切球，如图 6. 位置关系：正四面体的六条棱与球面相切，正四面体的中心与球心重合；

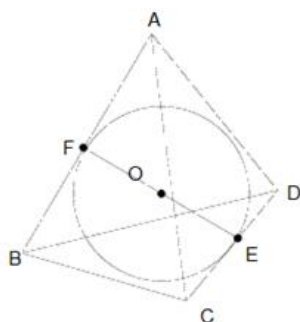


图6

数据关系：设正四面体的棱长为 a ，高为 h ；球的半径为 R ，这时有 $4R = \sqrt{3}h = \sqrt{2}a, h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

例 10. 若一个正四面体的表面积为 S_1 ，其内切球的表面积为 S_2 ，则 $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$.

【解析】 设正四面体棱长为 a ，则正四面体表面积为 $S_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \sqrt{3}a^2$ ，其内切球半径为正四面体高的 $\frac{1}{4}$ ，即 $r = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ，因此内切球表面积为 $S_2 = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{6}$ ，则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{\frac{\pi a^2}{6}} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$.

例 11. 在四面体 $ABCD$ 中，若 $AB = CD = \sqrt{3}$ ， $AC = BD = 2$ ， $AD = BC = \sqrt{5}$ ，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 6π

【解析】 由题意可采用割补法，考虑到四面体 $ABCD$ 的四个面为全等的三角形，所以可在其每个面补上一个以 $\sqrt{3}$ ，2， $\sqrt{5}$ 为三边的三角形作为底面，且以分别 x ， y ， z 长、两两垂直的侧棱的三棱锥，从而可得到一个长、宽、高分别为 x ， y ， z 的长方体，并且 $x^2 + y^2 = 3$ ， $x^2 + z^2 = 5$ ， $y^2 + z^2 = 4$ ，则有 $(2R)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 6$ （ R 为球的半

径), 得 $2R^2=3$, 所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=6\pi$. 故答案为: 6π .

点评: 与球有关的组合体问题, 一种是内切, 一种是外接. 解题时要认真分析图形, 明确切点和接点的位置, 确定有关元素间的数量关系, 并作出合适的截面图. 一般外接球需要求球心和半径, 首先应确定球心的位置, 借助于外接球的性质, 球心到各顶点距离相等, 这样可先确定几何体中部分点组成的多边形的外接圆的圆心, 过圆心且垂直于多边形所在平面的直线上任一点到多边形的顶点的距离相等, 然后同样的方法找到另一个多边形的各顶点距离相等的直线 (这两个多边形需有公共点), 这样两条直线的交点, 就是其外接球的球心, 再根据半径, 顶点到底面中心的距离, 球心到底面中心的距离, 构成勾股定理求解, 有时也可利用补体法得到半径.

2.2 其它棱锥与球的切接问题

球与正棱锥的组合, 常见的有两类, 一是球为三棱锥的外接球, 此时三棱锥的各个顶点在球面上, 根据截面图的特点, 可以构造直角三角形进行求解. 二是球为正棱锥的内切球, 例如正三棱锥的内切球, 球与正三棱锥四个面相切, 球心到四个面的距离相等, 都为球半径 R . 这样求球的半径可转化为球心到三棱锥面的距离, 故可采用等体积法解决, 即四个小三棱锥的体积和为正三棱锥的体积.

球与一些特殊的棱锥进行组合, 一定要抓住棱锥的几何性质, 可综合利用截面法、补形法等进行求解. 例如, 四个面都是直角三角形的三棱锥, 可利用直角三角形斜边中点几何特征, 巧定球心位置.

例 12. (2021·江西上饶市·高三一模 (理)) 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $\triangle BCD$ 是边长为 3 的正三角形, $AB = \sqrt{3}$, 则该三棱锥的外接球的表面积为 ()

- A. 21π B. 6π C. 24π D. 15π

【答案】D

【分析】 利用正弦定理求出 $\triangle BCD$ 的外接圆的半径, 再由勾股定理求出三棱锥的外接球的半径, 进而得出表面积.

【解析】 设 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心为 O_1 , 半径为 r , 该三棱锥的外接球的球心为 O , 半径为 R ,

$$\because \frac{3}{\sin 60^\circ} = 2r, \therefore r = \sqrt{3}, \because OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore R^2 = OO_1^2 + r^2 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}, \therefore S_{\text{表}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{15}{4} = 15\pi,$$

故选 D.

例 13. (2021·广西名校联考) 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $AB = 6, BC = 4, \angle BDC = 30^\circ$, 三棱锥 $A-BCD$ 的顶点都在球 O 上, 则球 O 的表面积是 ()

- A. 25π B. 50π C. 100π D. $\frac{500\pi}{3}$

【答案】C

【分析】由正弦定理可得 $\triangle BCD$ 的外接圆半径，设球半径为 R ，球心为 O ，则 $OC^2 = R^2$ ，利用勾股定理计算出半径，进而得出球 O 的表面积。

【解析】由题意， $BC = 4, \angle BDC = 30^\circ$ ，由正弦定理得 $\triangle BCD$ 的外接圆半径 $r = 4$ ，设球体半径为 R ，球心为 O ，则 $OC^2 = R^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = 25$ ，所以此三棱锥的外接球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 100\pi$ ，故选 C。

例 14. 菱形 $ABCD$ 中， $AB = 2, \angle DAB = 120^\circ$ ，将 $\triangle CBD$ 沿 BD 折起， C 点变为 E 点，当四面体 $E - ABD$ 的体积最大时，四面体 $E - ABD$ 的外接球的面积为（ ）

- A. 20π B. 40π C. 60π D. 80π

【答案】A

【分析】根据题意，当平面 $EBD \perp$ 平面 ABD 时，此时 $E - ABD$ 的体积取得最大值，且 C 为 $\triangle ABD$ 的外心，过点 C 作平面 ABD 的垂线 l ，设 l 存在点 O 点，使得 $OE = OA = OB = OD$ ，利用球的性质，求得球的半径，结合球的表面积公式，即可求解。

【解析】由题意，三棱锥 $E - ABD$ 的底面 $\triangle ABD$ 的面积为定值，当平面 $EBD \perp$ 平面 ABD 时，此时点 E 到底面 ABD 的距离最大，此时三棱锥 $E - ABD$ 的体积取得最大值，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB = 120^\circ$ ，连接 AC 交 BD 与点 M ，可得 $CD = CA = CB$ ，所以 C 为 $\triangle ABD$ 的外心，

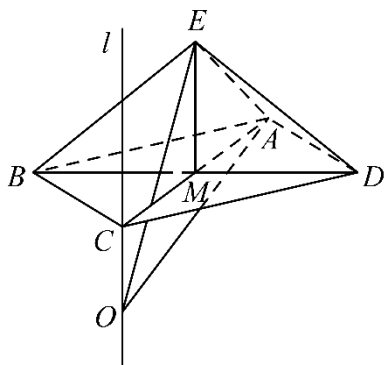
过点 C 作平面 ABD 的垂线 l ，可得 l 上点到 A, B, D 三点的距离相等，

设 l 存在点 O 点，使得 $OE = OA = OB = OD$ ，即点 O 为三棱锥 $E - ABD$ 的外接球的球心，

设 $OC = x$ ，可得 $AC^2 + OC^2 = CM^2 + (EM + OC)^2$ ，即 $4 + x^2 = 1 + (x + 1)^2$ ，解得 $x = 1$ ，

所以外接球的半径为 $r = \sqrt{AC^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，所以外接球的表面积为

$S = 4\pi r^2 = 4\pi \times (\sqrt{5})^2 = 20\pi$ 。故选 A。



【点睛】解决与球有关的切、接问题，其通法是作出截面，将空间几何问题转化为平面几何问题求解，其解题思维流程：

(1) 定球心：如果是内切球，球心到切点的距离相等且为半径；如果是外接球，球心到接点的距离相等且为半径；

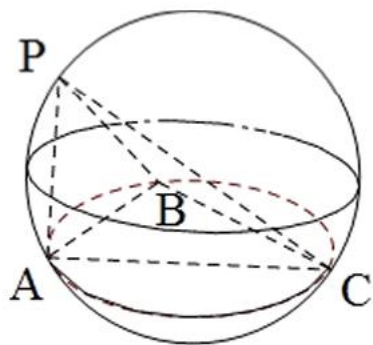
(2) 作截面：选准最佳角度做出截面（要使这个截面尽可能多的包含球、几何体的各种元素以及体现这些元素间的关系），达到空间问题平面化的目的；

(3) 求半径下结论：根据作出截面中的几何元素，建立关于球半径的方程，并求解。

例 15. 三棱锥 $P-ABC$ 的每个顶点都在球 O 的表面上， $BC \perp$ 平面 PAB ， $PA \perp AB$ ， $PA = 2$ ， $AB = 1$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，则球 O 的表面积为_____.

【答案】 8π

【解析】 $\because BC \perp$ 平面 PAB ，则 $PA \perp BC$ ， $PA \perp AB$ ，且 $AB \cap BC = B$ ，则 $PA \perp$ 平面 ABC ，所以 $PA \perp AC$ ，又 $BC \perp PB$ ， $\therefore PC$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的直径， $\therefore PC = \sqrt{PA^2 + AB^2 + BC^2} = \sqrt{4+1+3} = 2\sqrt{2}$ ，



$\therefore PC$ 的中点为球 O 的球心， $\therefore$ 球 O 的半径 $r = \frac{PC}{2} = \sqrt{2}$ ， $\therefore$ 球 O 的面积 $S = 4\pi r^2 = 8\pi$ 。故答案为： 8π 。

3 球与球相切问题

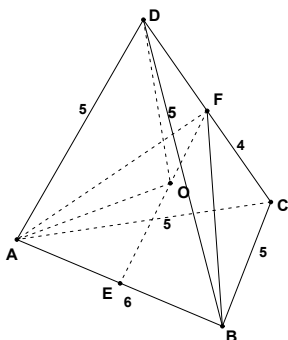
对于球与球的相切组合成复杂的几何体问题，要根据丰富的空间想象力，通过准确确定各个小球的球心的位置，或者巧借截面图等方法，将空间问题转化平面问题求解。

例 16. 已知有半径分别为 2、3 的球各两个，且这四个球彼此相外切，现有一个球与此四个球都相外切，则此球的半径为_____.

【答案】 $\frac{6}{11}$

【解析】如图：设四个球的球心分别为 A 、 B 、 C 、 D ，则 $AD=AC=BD=BC=5$ ， $AB=6$ ， $CD=4$ 。设 AB 中点为 E 、

CD 中点为 F, 连结 EF. 在 $\triangle ABF$ 中求得 $BF = \sqrt{21}$, 在 $\triangle EBF$ 中求得 $EF = 2\sqrt{3}$.



由于对称性可得第五个球的球心 O 在 EF 上, 连结 OA、OD. 设第五个

球的半径为 r, 则 $OA = r + 3$, $OD = r + 2$, 于是 $OE = \sqrt{(r+3)^2 - 3^2} = \sqrt{r^2 + 6r}$,

$OF = \sqrt{(r+2)^2 - 2^2} = \sqrt{r^2 + 4r}$, $\therefore OE + OF = EF$,

$$\therefore \sqrt{r^2 + 6r} + \sqrt{r^2 + 4r} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{r^2 + 6r} = 2\sqrt{3} - \sqrt{r^2 + 4r} \text{ 平方整理再平方得 } 11r^2 + 60r - 36 = 0 \text{ 解得 } r = \frac{6}{11} \text{ 或}$$

-6 (舍掉), 故答案为 $\frac{6}{11}$.

例 17. 把四个半径都是 1 的球中的三个放在桌面上, 使它两两外切, 然后在它们上面放上第四个球, 使它与前三个都相切, 求第四个球的最高点与桌面的距离.

【答案】 $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

【解析】 四球心组成棱长为 2 的正四面体的四个顶点, 则正四面体的高 $h = \sqrt{2^2 - (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

而第四个球的最高点到第四个球的球心距离为求的半径 1, 且三个球心到桌面的距离都为 1, 故第四

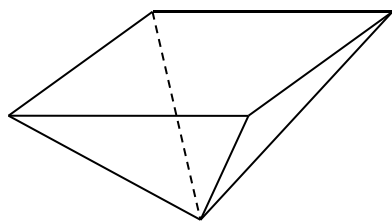
个球的最高点与桌面的距离为 $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

4 球与几何体的各条棱相切问题

球与几何体的各条棱相切问题, 关键要抓住棱与球相切的几何性质, 达到明确球心的位置为目的, 然后通

过构造直角三角形进行转换和求解. 如与正四面体各棱都相切的球的半径为相对棱的一半: $r' = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

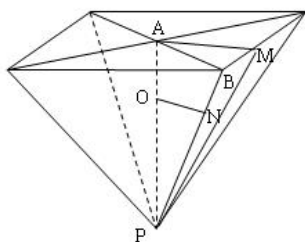
例 18. 把一个皮球放入如图 10 所示的由 8 根长均为 20 cm 的铁丝接成的四棱锥形骨架内, 使皮球的表面与 8 根铁丝都有接触点, 则皮球的半径为 ()



- A. $10\sqrt{3}$ cm B. 10 cm C. $10\sqrt{2}$ cm D. 30cm

【答案】B

【解析】如图所示，由题意球心在 AP 上，球心为 O，过 O 作 BP 的垂线 ON 垂足为 N， $ON=R$ ， $OM=R$ ，



因为各个棱都为 20，所以 $AM=10$ ， $BP=20$ ， $BM=10$ ， $AB=10\sqrt{2}$ ，设 $\angle BPA = \alpha$ ，

在 $Rt\triangle BPM$ 中， $BP^2 = BM^2 + PM^2$ ，所以 $PM = 10\sqrt{3}$ 。

在 $Rt\triangle PAM$ 中， $PM^2 = AM^2 + AP^2$ ，所以 $PA = 10\sqrt{2}$ 。

在 $Rt\triangle ABP$ 中， $\sin \alpha = \frac{AB}{BP} = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

在 $Rt\triangle ONP$ 中， $\sin \alpha = \frac{ON}{OP} = \frac{R}{OP}$ ，所以 $\frac{R}{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $OP = \sqrt{2}R$ 。

在 $Rt\triangle OAM$ 中， $OM^2 = AO^2 + AM^2$ ，所以， $R^2 = (10\sqrt{2} - \sqrt{2}R)^2 + 100$ ，解得， $R = 10$ 或 30 （舍），

所以， $R = 10\text{cm}$ ，故选 B。

5 球与旋转体切接问题

首先画出球及其它旋转体的公共轴截面，然后寻找几何体与几何体几何元素之间的关系。

例 19. (2021·山东德州市·高三期末) 阿基米德是伟大的古希腊数学家，他和高斯、牛顿并列为世界三大数学家，他一生最为满意的一个数学发现就是“圆柱容球”定理，即圆柱容器里放了一个球，该球顶天立地，四周碰边（即球与圆柱形容器的底面和侧面都相切），球的体积是圆柱体积的三分之二，球的表面积也是圆柱表面积的三分之二。今有一“圆柱容球”模型，其圆柱表面积为 12π ，则该模型中球的体积为（ ）

- A. 8π B. 4π C. $\frac{8}{3}\pi$ D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

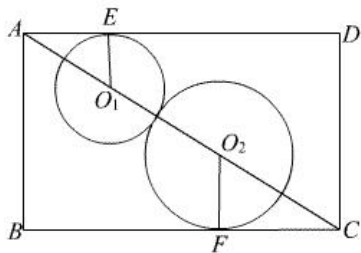
【答案】D

【解析】由题意球的表面积为 $=12\pi \times \frac{2}{3} = 8\pi$ ，即 $4\pi r^2 = 8\pi$ ， $r = \sqrt{2}$ ，所以体积为

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi. \text{ 故选 D.}$$

例 20. 在棱长为 1 的正方体内有两个球相外切且又分别与正方体内切. (1) 求两球半径之和; (2) 球的半径为多少时, 两球体积之和最小.

【解析】如图, 球心 O_1 和 O_2 在 AC 上, 过 O_1, O_2 分别作 AD, BC 的垂线交于 E, F . 则由 $AB=1, AC=\sqrt{3}$ 得 $AO_1 = \sqrt{3}r, CO_2 = \sqrt{3}R$.



$$\therefore r + R + \sqrt{3}(r + R) = \sqrt{3}, \therefore R + r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ 设两球体积之和为 } V, \text{ 则 } V &= \frac{4}{3}\pi(R^3 + r^3) = \frac{4}{3}\pi(r+R)(R^2 - Rr + r^2) \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{3\sqrt{3}}{2} [(R+r)^2 - 3rR] = \frac{4}{3}\pi \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3R\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - R\right) \right] = \frac{4}{3}\pi \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[3R^2 - \frac{3(3-\sqrt{3})}{2}R + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right], \text{ 当} \\ R &= \frac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ 时, } V \text{ 有最小值. } \therefore \text{ 当 } R = r = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ 时, 体积之和有最小值.} \end{aligned}$$

例 21. (2021·广西高三其他模拟(文)) 乒乓球被称为中国的“国球”, 是一种世界流行的球类体育项目, 2000 年之后国际比赛用球的直径为 40 mm. 现用一个底面为正方形的棱柱盒子包装四个乒乓球, 为倡导环保理念, 则此棱柱包装盒(长方体)表面积的最小值为 _____ cm^2 . (忽略乒乓球及包装盒厚度)

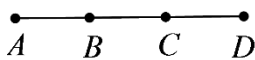
【答案】256

【分析】比较三种情形下的表面积即可得: 一种四个球排列一列, 四个球心在同一直线上; 第二种四个球平放,

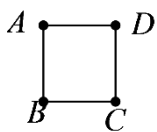
四个球心构成正方形；第三种四个球心构成正四面体.

【解析】设 A, B, C, D 是四个球的球心，以下面积单位是 cm^2 ，

(1) A, B, C, D 四点共线，则 $S = 2 \times 4^2 + 4 \times 4 \times 16 = 288$.



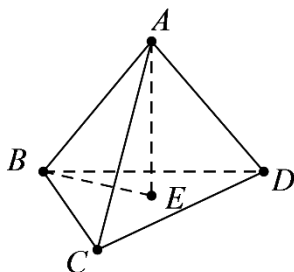
(2) A, B, C, D 四点构成一个正方形，则 $S = 2 \times 8^2 + 4 \times 8 \times 4 = 256$,



(3) A, B, C, D 四点构成一正四面体，如图，设 E 是 $\triangle BCD$ 中心，则 $AE \perp$ 平面 BCD ， $AE \perp BE$ ，

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 4 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad AE = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

正四棱柱为正方体，棱长为 $\frac{4\sqrt{6}}{3} + 4$ ，表面积为 $S = 6 \times \left(4 + \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 32(5 + 2\sqrt{6}) > 256$ ，



比较可得表面积最小值为 256 cm^2 .

【反思提升】综合上面的五种类型，解决与球的外切问题主要是指球外切多面体与旋转体，解答时首先要找准切点，将问题转化成平面几何问题，应用三角形中的边角关系，建立与球半径 r, R 的联系，将球的体积之和用 r 或 R 表示. 如果外切的是多面体，则作截面时主要抓住多面体过球心的对角面来作；把一个多面体的几个顶点放在球面上即为球的内接问题. 解决这类问题的关键是抓住内接的特点，即球心到多面体的顶点的距离等于球的半径. 发挥好空间想象力，借助于数形结合进行转化，问题即可得解. 如果是一些特殊的几何体，如正方体、正四面体等可以借助结论直接求解，此时结论的记忆必须准确. 高考题往往与三视图相结合，题目的难易不一，在复习中切忌好高骛远，应重视各种题型的备考演练，重视高考信息的搜集，不断充实题目的类型，升

华解题的境界.

专题 22 几何体的表面积与体积的求解

从近几年的考试题来看,空间几何体的表面积、体积等问题是高考的热点,题型既有选择题、填空题,又有解答题,难度为中、低档.客观题主要考查由三视图得出几何体的直观图,求其表面积、体积或由几何体的表面积、体积得出某些量;主观题考查较全面,考查线、面位置关系,及表面积、体积公式,无论是何种题型都考查学生的空间想象能力.预测 2022 年高考仍将以空间几何体的面积、体积为主要考查点,重点考查学生的空间想象能力、运算能力及逻辑推理能力.

1 几何体的表面积

(1) 以三视图为载体考查几何体的表面积,关键是能够对给出的三视图进行恰当的分析,从三视图中发现几何体中各元素间的位置关系及数量关系.

(2) 多面体的表面积是各个面的面积之和;组合体的表面积应注意重合部分的处理.

(3) 圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面,计算侧面积时需要将这个曲面展为平面图形计算,而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

1.1 多面体的表面积

例 1. (2021·山西吕梁市·高三一模(理)) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是矩形,侧面 PAD 是正三角形,且侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = 2$,若四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$,则该四棱锥的表面积为 ()

A. $4\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $8\sqrt{3}$ D. $10\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】首先确定球心 O 的位置,过 O 作底面 $ABCD$ 的垂线,垂足为 M ,过 O 作三角形 APD 的垂线,垂足为 N ,过 N 作 $NE \perp AD$,证明四边形 $MENO$ 是平行四边形,设 $AD = 2x$,分别求出 OA 、 OM 、 AM 的长,利用勾股定理可得 x ,然后分别计算四个侧面和底面的面积可得答案.

【解析】设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 O ,过 O 作底面 $ABCD$ 的垂线,垂足为 M ,因为四边形 $ABCD$ 是长方形,所以 M 的底面中心,即对角线 AC 、 BD 的交点,过 O 作三角形 APD 的垂线,垂足为 N ,所以 N 是正三角形 APD 外心,

设外接球半径为 r ，外接球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$ ，所以 $r = \sqrt{2}$ ，即 $OA = \sqrt{2}$ ，

过 N 作 $NE \perp AD$ ，则 E 是 AD 的中点，连接 EM ，所以 $EM = \frac{1}{2}AB = 1$ ， $EM \perp AD$ ，因为平面 $APD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $APD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，

所以 $NE \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $NE \parallel OM$ ，所以 $EM \perp$ 平面 APD ，所以 $EM \parallel ON$ ，

所以四边形 $MENO$ 是平行四边形，即 $OM = NE$ ，设 $AD = 2x$ ，则 $AM = \sqrt{AE^2 + EM^2} = \sqrt{x^2 + 1}$ ，

$NE = \frac{1}{3}PE = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，所以 $OM = NE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，由勾股定理得 $OA^2 = OM^2 + AM^2$ ，即

$$2 = \frac{1}{3}x^2 + x^2 + 1, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } AD = \sqrt{3}, S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2}AD^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

因为 $AB \parallel CD \parallel OM$ ，所以 $AB \perp$ 平面 APD ， $CD \perp$ 平面 APD ，

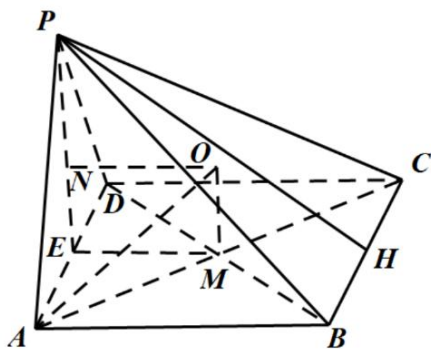
所以 $PA \perp AB$ ， $PD \perp CD$ ， $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times AB \times AP = \sqrt{3}$ ，

因为 $PB = PC = \sqrt{PA^2 + AB^2} = \sqrt{7}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，

作 $PH \perp BC$ 于 H ，所以 H 为 BC 的中点，所以 $PH = \sqrt{PB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{7 - \frac{3}{4}} = \frac{5}{2}$ ，

所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times PH \times BC = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ ， $S_{\text{矩形}ABCD} = 2\sqrt{3}$ ，所以 $S_{\text{表}} = S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} + S_{\text{矩形}ABCD} = 6\sqrt{3}$ ，故

选 B.



【点睛】本题考查了球内接四棱锥的问题，关键点是确定球心的位置及计算边长，考查了学生的空间想象力、推理能力和计算能力。

例 2. (2021·湖北 B4 联考) 现有一个三棱锥形状的工艺品 $P-ABC$ ，点 P 在底面 ABC 的投影为 Q ，满足

$$\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{S_{\triangle QAC}}{S_{\triangle PAC}} = \frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{QA^2 + QB^2 + QC^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1}{3}, \quad S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3},$$

(不计此球形容器的厚度)中, 则该球形容器的表面积的最小值为 ()

- A. 42π B. 44π C. 48π D. 49π

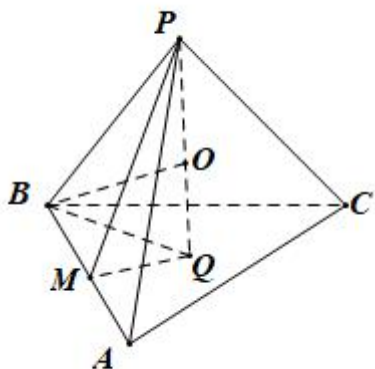
【答案】D

【分析】作 $QM \perp AB$, 连接 PM , 易证 $AB \perp PM$, 由 $\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times QM}{\frac{1}{2} \times AB \times PM} = \frac{1}{2}$, 得到 $PM = 2QM$, 再

根据 $\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{S_{\triangle QAC}}{S_{\triangle PAC}} = \frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{1}{2}$, 由对称性得到 $AB = BC = AC$, 然后根据 $\frac{QA^2 + QB^2 + QC^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1}{3}$,

$S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$, 求得 $AB = 6, AQ = 2\sqrt{3}$, 在 $\triangle AOQ$ 中, 由 $AO^2 = OQ^2 + AQ^2$ 求解半径即可.

【解析】如图所示:



作 $QM \perp AB$ 与 M , 连接 PM , 因为 $PQ \perp$ 平面 ABC , 所以 $PQ \perp AB$, 又 $QM \cap PQ = Q$, 所以 $AB \perp$ 平面 PQM ,

所以 $AB \perp PM$, 所以 $\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times QM}{\frac{1}{2} \times AB \times PM} = \frac{1}{2}$, $PM = 2QM$,

因为 $\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{S_{\triangle QAC}}{S_{\triangle PAC}} = \frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{1}{2}$, 由对称性得 $AB = BC = AC$, 又因为 $\frac{QA^2 + QB^2 + QC^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1}{3}$,

$S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB^2 \times \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$, 解得 $AB = 6, AQ = 2\sqrt{3}$,

所以 $QM = \sqrt{3}, PM = 2\sqrt{3}, PQ = 3$,

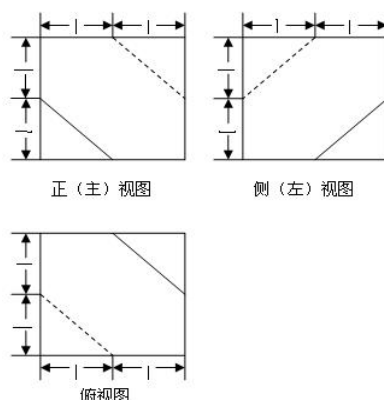
设外接球的半径为 r ，在 $\triangle AOQ$ 中， $AO^2 = OQ^2 + AQ^2$ ，即 $r^2 = (3-r)^2 + (2\sqrt{3})^2$ ，解得 $r = \frac{7}{2}$ ，

所以外接球的表面积为 $S = 4\pi r^2 = 49\pi$ ，即该球形容器的表面积的最小值为 49π ，故选 D.

【点睛】关键点点睛：本题关键是由 $\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{S_{\triangle QAC}}{S_{\triangle PAC}} = \frac{S_{\triangle QBC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{1}{2}$ 得到三棱锥是正棱锥，从而找到外接球球心的位置而得解..

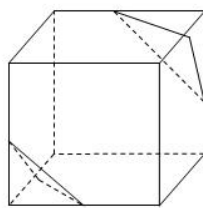
例 3. 一个多面体的三视图如图所示，则该多面体的表面积为

- A. $21 + \sqrt{3}$ B. $18 + \sqrt{3}$ C. 21 D. 18



【答案】A

【解析】如图，将边长为 2 的正方体截去两个角， $\therefore S_{\text{表}} = 2 \times 2 \times 6 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = 21 + \sqrt{3}$



1.2 旋转体的表面积

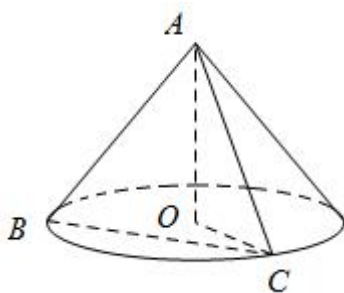
例 1. (2021·安徽皖江名校联盟) 已知圆锥的顶点为 A ，过母线 AB 、 AC 的截面面积是 $2\sqrt{3}$ 。若 AB 、 AC 的夹角是 60° ，且 AC 与圆锥底面所成的角是 30° ，则该圆锥的表面积是 ()

- A. $2\sqrt{2}\pi$ B. $(2\sqrt{3} + 6)\pi$ C. $(4\sqrt{2} + 6)\pi$ D. $(4\sqrt{3} + 6)\pi$

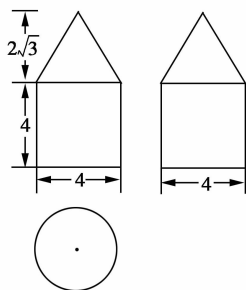
【答案】D

【分析】由截面面积求得母线长，再由母线与底面所成角求得底面半径，由此可得圆锥表面积。

【解析】设圆锥的母线长是 l ，则 $\frac{1}{2}l^2 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ， $l = 2\sqrt{2}$ ，圆锥底面半径是 $r = OC = 2\sqrt{2} \times \cos 30^\circ = \sqrt{6}$ ，于是该圆锥的表面积是 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} + \pi \cdot (\sqrt{6})^2 = (4\sqrt{3} + 6)\pi$ ，故选 D.



例 2. 【上海市浦东新区高考一模】如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为

A. 20π B. 24π C. 28π D. 32π

【答案】C

【解析】该几何体是圆锥与圆柱的复合体，设圆柱底面圆半径为 r ，周长为 c ，圆锥母线长为 l ，圆柱高为 h 。

由图得 $r = 2$ ， $c = 2\pi r = 4\pi$ ，由勾股定理得： $l = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ ，

$S_{\text{表}} = \pi r^2 + ch + \frac{1}{2}cl = 4\pi + 16\pi + 8\pi = 28\pi$ ，故选 C.

例 3. 一个圆锥过轴的截面为等边三角形，它的顶点和底面圆周在球 O 的球面上，则该圆锥的表面积与球 O 的表面积比值为_____.

【答案】 $\frac{9}{16}$

【解析】设等边三角形的边长为 $2a$ ，则 $S_{\text{圆锥表}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi a \cdot 2a + \pi a^2 = 3\pi a^2$. 又 $R^2 = a^2 + (\sqrt{3}a - R)^2$ (R 为球 O 的半径)，

所以 $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ，故 $S_{\text{球表}} = 4\pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{16\pi}{3}a^2$ ，故其表面积比为 $\frac{9}{16}$.

2 几何体的体积

1. 求体积常见技巧

当给出的几何体比较复杂，有关的计算公式无法运用，或者虽然几何体并不复杂，但条件中的已知元素彼

此离散时,我们可采用“割”、“补”的技巧,化复杂几何体为简单几何体(柱、锥、台),或化离散为集中,给解题提供便利.

(1) 几何体的“分割”: 几何体的分割即将已知的几何体按照结论的要求,分割成若干个易求体积的几何体,进而求之.

(2) 几何体的“补形”: 与分割一样,有时为了计算方便,可将几何体补成易求体积的几何体,如长方体、正方体等. 另外补台成锥是常见的解决台体侧面积与体积的方法,由台体的定义,我们在有些情况下,可以将台体补成锥体研究体积.

(3) 有关柱、锥、台、球的面积和体积的计算,应以公式为基础,充分利用几何体中的直角三角形、直角梯形求有关的几何元素.

2. 求体积常见方法

①直接法(公式法); ②转移法: 利用祖暅原理或等积变化,把所求的几何体转化为与它等底、等高的几何体的体积; ③分割法求和法: 把所求几何体分割成基本几何体的体积; ④补形法: 通过补形化归为基本几何体的体积; ⑤四面体体积变换法; ⑥利用四面体的体积性质: (i) 底面积相同的两个三棱锥体积之比等于其底面积的比; (ii) 高相同的两个三棱锥体积之比等于其底面积的比; (iii) 用平行于底面的平面去截三棱锥,截得的小三棱锥与原三棱锥的体积之比等于相似比的立方.

求多面体体积的常用技巧是割补法(割补成易求体积的多面体. 补形: 三棱锥 $\Rightarrow$ 三棱柱 $\Rightarrow$ 平行六面体; 分割: 三棱柱中三棱锥、四棱锥、三棱柱的体积关系是 1: 2: 3 和等积变换法(平行换点、换面)和比例(性质转换)法等.

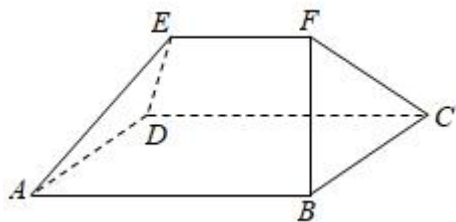
3. 常见的特殊几何体的性质

2.1 几何体的体积

给出几何体的三视图,求该几何体的体积或表面积时,可以根据三视图还原出实物,画出该几何体的直观图,确定该几何体的结构特征,并利用相应的体积公式求出其体积,求体积的方法有直接套用公式法、等体积转换法和割补法等多种. 若所给几何体为不规则几何体,常用等积转换法和割补法求解.

例 1. (2021·江西重点中学协作体联考) 如图 $ABCDEF$ 为五面体,其中四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$,

$AB = 3EF = \frac{3}{2}AD = 3$, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形,则该五面体的体积为 ()



A. $\frac{7\sqrt{2}}{3}$

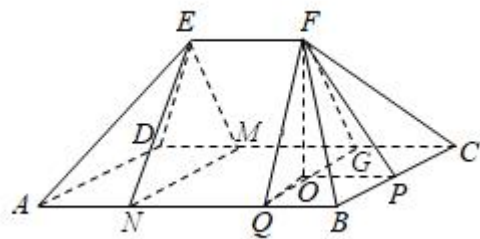
B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【分析】把该五面体分割为两个等体积的四棱锥和一个直三棱柱，结合棱锥和棱柱的体积公式，即可求解.

【解析】过点 F 作 $FO \perp$ 平面 $ABCD$ ，垂足为 O ，取 BC 的中点 P ，连接 PF ，过点 F 作 $FQ \perp AB$ ，垂足为 Q ，连接 OQ ，交 CD 于 G ，得到四棱锥 $F-BCGQ$ ，同理得到四棱锥 $E-ADMN$ ，可得 $V_{F-BCGQ} = V_{E-ADMN}$ ，如图所示，因为 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是边长为 2 的等边三角形，所以 $OP = \frac{1}{2}(AB - EF) = 1$, $PF = \sqrt{3}$, $OQ = \frac{1}{2}BC = 1$ ，可得 $OF = \sqrt{PF^2 - OP^2} = \sqrt{2}$ ，所以 $V_{E-ADMN} = V_{F-BCGQ} = \frac{1}{3}S_{BCGQ} \cdot OF = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，中间部分三棱柱 $FGQ-EMN$ 为直三棱柱，其体积为 $V_{FGQ-EMN} = S_{\triangle FGQ} \times EF = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ ，所以该五面体的体积为 $V = V_{FGQ-EMN} + V_{E-ADMN} = V_{F-BCGQ} = \sqrt{2} + 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$ ，故选 A.

【点睛】求空间几何体的表面积与体积的求法：

(1) 公式法：对于规则的几何体的表面积和体积，可直接利用公式进行求解；

(2) 割补法：把不规则的图形分割成规则的图形，然后进行体积的计算，或不规则的几何体补成规则的几何体，

不熟悉的几何体补成熟悉的几何体，便于计算；

(3) 等体积法：等体积法也称积转化或等积变形，通过选择合适的底面来求几何体体积的一种方法，多用来解决锥体的体积，特别时三棱锥的体积。

例 2. 已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为 ()

- A. π B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】B

【解析】圆柱的轴截面如图， $AC=1$ ， $AB=\frac{1}{2}$ ，所以圆柱底面半径 $r=BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么圆柱的体积是

$$V = \pi r^2 h = \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{3}{4}\pi, \text{ 故选 B.}$$

例 3. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点， $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$ ，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 ()

- A. $12\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $54\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】设等边三角形 ABC 的边长为 x ，则 $\frac{1}{2}x^2 \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$ ，得 $x=6$ 。设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r ，则

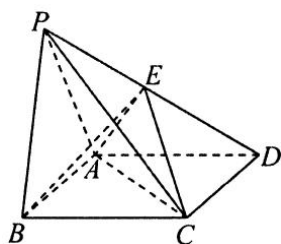
$$2r = \frac{6}{\sin 60^\circ}, \text{ 解得 } r = 2\sqrt{3}, \text{ 所以球心到 } \triangle ABC \text{ 所在平面的距离 } d = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2, \text{ 则点 } D \text{ 到平面 } ABC$$

的最大距离 $d_1 = d + 4 = 6$ ，所以三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值 $V_{\max} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times 6 = 18\sqrt{3}$ 。

例 4. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA=AD=2$ ， $\angle PAB = \angle PAD = 120^\circ$ ， E 为 PD 的中点， $AE \perp EC$ 。

(1) 求证： $PB \parallel$ 平面 EAC ；

(2) 求三棱锥 $B-ACE$ 的体积。



【答案】(1) 证明见解析；(2) $V_{B-ACE} = \frac{1}{2}$.

【分析】(1) 连接 BD ，交 AC 于点 O ，连接 EO ，根据三角形中位线的性质可得 $PB \parallel EO$ ，再根据线面平行的判定可得结论成立. (2) 在 $\triangle PAB$ 中由余弦定理得 $PB = 2\sqrt{3}$ ，于是 $EO = \sqrt{3}$. 在平面 PAD 内，作 $PF \perp AD$ ，交 DA 的延长线于 F ，由条件可得 $PF \perp$ 平面 $ABCD$ ，即 PF 为点 P 到平面 $ABCD$ 的距离，然后再结合 $V_{B-ACE} = V_{E-ACB} = \frac{1}{2}V_{P-ABC}$ 求解可得所求.

【解析】(1) 证明：连接 BD ，交 AC 于点 O ，连接 EO . $\because E$ 为 PD 的中点， O 为 BD 的中点，

$\therefore EO$ 为 $\triangle PBD$ 的中位线， $\therefore PB \parallel EO$ ，且 $EO = \frac{1}{2}PB$.

又 $EO \subset$ 平面 EAC ， $PB \not\subset$ 平面 EAC ， $\therefore PB \parallel$ 平面 EAC .

(2) 在 $\triangle PAB$ 中， $PA = AB = 2$ ， $\angle PAB = 120^\circ$ ，

由余弦定理得 $PB^2 = PA^2 + AB^2 - 2PA \cdot AB \cos 120^\circ = 12$ ， $\therefore PB = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore EO = \sqrt{3}$.

$\because AE \perp EC$ ，且 O 为 AC 的中点， $\therefore AC = 2EO = 2\sqrt{3}$.

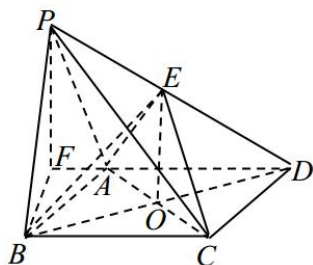
在 $\triangle ABO$ 中， $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 1$. 在平面 PAD 内，作 $PF \perp AD$ ，交 DA 的延长线于 F .

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $\therefore PF \perp$ 平面 $ABCD$.

即 PF 为点 P 到平面 $ABCD$ 的距离. $\because$ 点 E 为 PD 的中点，

$\therefore$ 点 E 到平面 $ABCD$ 的距离 h 是 PF 长度的一半. 在 $\triangle PFA$ 中， $PF = PA \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore V_{B-ACE} = V_{E-ACB} = \frac{1}{2}V_{P-ABC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2}$.



【点睛】在求空间几何体的体积时，要注意分清几何体的形状，对于形状规则的几何体可直接根据公式求其体积；对于形状不规则的几何体，可根据“分割”或“补形”的方法转化为形状规则的几何体再求其体积.

2.2 关于球的切、接问题

解决球与其他几何体的切、接问题，关键在于仔细观察、分析，弄清相关元素的关系和数量关系，选准最佳角度作出截面（要使这个截面尽可能多地包含球、几何体的各种元素以及体现这些元素之间的关系），达到空间问题平面化的目的。

例 1. (2021·内蒙古包头市·高三期末(文)) 已知各顶点都在同一球面上的正四棱柱的底边长为 a ，高为 h ，球的体积为 $8\sqrt{6}\pi$ ，则这个正四棱柱的侧面积的最大值为 ()

- A. $48\sqrt{2}$ B. $24\sqrt{2}$ C. $96\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】先求出半径，然后利用体对角线等于球的直径建立关系求解。

【解析】设球的半径为 R ，则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\sqrt{6}\pi$ ，解得 $R = \sqrt{6}$ ，所以 $a^2 + a^2 + h^2 = (2R)^2 = 4R^2$ ，即

$2a^2 + h^2 = 24 \geq 2\sqrt{2a^2h^2} = 2\sqrt{2}ah$ ，所以 $ah \leq 6\sqrt{2}$ ，侧面积 $S = 4ah \leq 24\sqrt{2}$ ，即侧面积的最大值为 $24\sqrt{2}$ ，故选 B。

【点睛】与球有关的组合体问题，一种是内切，一种是外接。解题时要认真分析图形，明确切点和接点的位置，确定有关元素间的数量关系，并作出合适的截面图，如球内切于正方体，切点为正方体各个面的中心，正方体的棱长等于球的直径；球外接于长方体，长方体的顶点均在球面上，长方体的体对角线长等于球的直径。

例 2. 在封闭的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球。若 $AB=6$ ， $AA_1=4$ ，则 V 的最大值是 ()

- A. 16π B. $\frac{32\pi}{3}$ C. 12π D. $4\sqrt{3}\pi$

【答案】D

【解析】正三角形 ABC 的边长为 6，其内切圆的半径为 $r = \sqrt{3} < 2$ ，所以在封闭的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内的球的半径最大值为 $\sqrt{3}$ ，所以其体积为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\sqrt{3}\pi$ ，故选 D。

例 3. (2021·河南焦作二模) 已知点 A, B, C 在半径为 5 的球面上，且 $AB = AC = 2\sqrt{14}$ ， $BC = 2\sqrt{7}$ ， P 为球面上的动点，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 ()

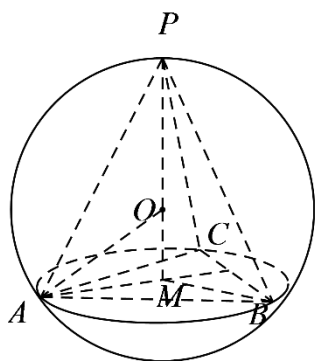
- A. $\frac{56\sqrt{7}}{3}$ B. $\frac{52\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{49\sqrt{7}}{3}$ D. $\frac{14\sqrt{7}}{3}$

【答案】A

【分析】求出球心到平面 ABC 的距离，由这个距离加上球半径得 P 到平面 ABC 距离的最大值，再由体积公

式可得 $P-ABC$ 体积的最大值.

【解析】如图, M 是 $\triangle ABC$ 的外心, O 是球心, $OM \perp$ 平面 ABC , 当 P 是 MO 的延长线与球面交点时, P 到平面 ABC 距离最大, 由 $AB = AC = 2\sqrt{14}$, $BC = 2\sqrt{7}$, 得 $\cos \angle ACB = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{14}}{4}$,
 $2AM = \frac{AB}{\sin \angle CB} = \frac{2\sqrt{14}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = 8$, $AM = 4$, $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, $PM = 3 + 5 = 8$, 又
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{14} \times 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = 7\sqrt{7}$, 所以最大的 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times 7\sqrt{7} \times 8 = \frac{56\sqrt{7}}{3}$,
 故选 A.



【点睛】本题考查求三棱锥的体积, 解题关键是确定三棱锥体积最大时 P 点在球面上的位置, 根据球的性质易得结论. 当底面 ABC 固定, M 是 $\triangle ABC$ 外心, 当 $PM \perp$ 平面 ABC , 且球心 O 在线段 PM 上时, P 到平面 ABC 距离最大.

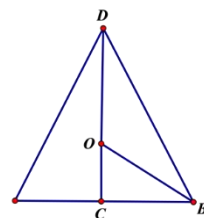
例 4. 已知底面半径为 1, 高为 $\sqrt{3}$ 的圆锥的顶点和底面圆周都在球 O 的球面上, 则此球的表面积为

- A. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ B. 4π C. $\frac{16\pi}{3}$ D. 12π

【答案】C

【解析】画出圆锥的截面如下图所示, 设球的半径为 r , 则

$$BC = 1, OC = \sqrt{3} - r, OB = r, \text{ 由勾股定理得 } 1^2 + (\sqrt{3} - r)^2 = r^2,$$



$$\text{解得 } r = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ 故表面积为 } 4\pi r^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

例 5. (2021·安徽六校联考) 已知三棱锥 $A-BCD$ 满足: $AB = AC = AD$, $\triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形. 三

棱锥 $A-BCD$ 的外接球的球心 O 满足: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, 则该三棱锥的体积为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

【答案】C

【分析】分析出三棱锥 $A-BCD$ 为正三棱锥, 由 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ 可知 O 为正 $\triangle BCD$ 的中心, 由球心的定义得出 $OA = OB = OC = OD$, 利用正弦定理求出 $\triangle BCD$ 的外接圆半径, 即为 OB , 可得出 OA , 再利用锥体的体积公式可求得该三棱锥的体积.

【解析】已知三棱锥 $A-BCD$ 满足: $AB = AC = AD$, $\triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形, 所以, 三棱锥 $A-BCD$ 为正三棱锥, 由于正三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的球心 O 满足: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, 则 O 为正 $\triangle BCD$ 的重心, 即 O 为正 $\triangle BCD$ 中心, 所以, $AO \perp$ 平面 BCD ,

由正弦定理可得 $OB = \frac{2}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore OA = OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

因此, $V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$, 故选 C.

【点睛】方法点睛: 求空间多面体的外接球半径的常用方法:

- ①补形法: 侧面为直角三角形, 或正四面体, 或对棱二面角均相等的模型, 可以还原到正方体或长方体中去求解;
- ②利用球的性质: 几何体中在不同面均对直角的棱必然是球大圆直径, 也即球的直径;
- ③定义法: 到各个顶点距离均相等的点为外接球的球心, 借助有特殊性底面的外接圆圆心, 找其垂线, 则球心一定在垂线上, 再根据带其他顶点距离也是半径, 列关系求解即可.

【反思提升】综合上面的两种类型, 我们可以概括出在解决几何体的表面积与体积问题中的方法与技巧:

1. 几何体的侧面积和全面积: 几何体侧面积是指(各个)侧面面积之和, 而全面积是侧面积与所有底面积之和. 对侧面积公式的记忆, 最好结合几何体的侧面展开图来进行.
2. 求体积时应注意的几点:

- (1) 求一些不规则几何体的体积常用割补的方法转化成已知体积公式的几何体进行解决.
- (2) 与三视图有关的体积问题注意几何体还原的准确性及数据的准确性.

3. 求组合体的表面积时注意几何体的衔接部分的处理.
4. 解答三视图问题的关键是由多面体的三视图想象出空间几何体的形状并画出其直观图. 三视图中“正侧一样高、正俯一样长、俯侧一样宽”, 因此, 可以根据三视图的形状及相关数据推断出原几何图形中的点、线、面之间的位置关系及相关数据.

专题二十三 与圆有关的最值问题

讲高考

纵观近几年高考对于圆的考查, 重点放在与圆相关的最值问题上, 主要考查与圆相关的参数范围问题和圆相关的长度或面积的最值问题. 除了以选择题、填空题的形式考查外, 有与圆锥曲线相结合的考查趋势. 要求学生有较强的数形结合能力、转化与化归意识和准确的计算能力, 才能顺利解答. 从实际教学来看, 这部分知识是学生掌握最为模糊, 看到就头疼的题目. 分析原因, 除了这类题目的入手确实不易之外, 主要是学生没有形成解题的模式和套路, 以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理. 本文就高中阶段出现这类问题加以类型的总结和方法的探讨.

1. 【高考全国 I 卷文数 6】已知圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$, 过点 $(1, 2)$ 的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为

()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【思路导引】根据直线和圆心与点 $(1, 2)$ 连线垂直时, 所求的弦长最短, 即可得出结论.

【解析】圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 化为 $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, $\therefore$ 圆心 C 坐标为 $C(3, 0)$, 半径为 3,

设 $P(1, 2)$, 当过点 P 的直线和直线 CP 垂直时, 圆心到过点 P 的直线的距离最大, 所求的弦长最短,

根据弦长公式最小值为 $2\sqrt{9 - |CP|^2} = 2\sqrt{9 - 8} = 2$, 故选 B.

【专家解读】本题的特点是注重基础, 本题考查了考查直线与圆位置关系的应用, 考查圆的几何性质的应用, 考查数学运算、直观想象等学科素养. 解题关键是圆的几何性质及勾股定理的应用.

2. 【高考全国 I 卷理数 11】已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点,

过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 ()

A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

【答案】D

【思路导引】由题意可判断直线与圆相离，根据圆的知识可知，四点 A, P, B, M 共圆，且 $AB \perp MP$ ，根据 $|PM| \cdot |AB| = 2S_{\triangle PAM} = 2|PA|$ 可知，当直线 $MP \perp l$ 时， $|PM| \cdot |AB|$ 最小，求出以 MP 为直径的圆的方程，根据圆系的知识即可求出直线 AB 的方程。

【解析】圆的方程可化为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，点 M 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|2 \times 1 + 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} > 2$ ， $\therefore$ 直线 l 与圆相离。依圆的知识可知，四点 A, P, B, M 四点共圆，且 $AB \perp MP$ ，

$$\therefore |PM| \cdot |AB| = 2S_{\triangle PAM} = 2 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times |AM| = 2|PA|, \text{ 而 } |PA| = \sqrt{|MP|^2 - 4},$$

当直线 $MP \perp l$ 时， $|MP|_{\min} = \sqrt{5}$ ， $|PA|_{\min} = 1$ ，此时 $|PM| \cdot |AB|$ 最小。

$$\therefore MP: y-1 = \frac{1}{2}(x-1) \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ 由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ 解得, } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$\therefore$ 以 MP 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x+1) + y(y-1) = 0$ ，即 $x^2 + y^2 - y - 1 = 0$ ，两圆的方程相减可得：

$2x + y + 1 = 0$ ，即为直线 AB 的方程，故选 D。

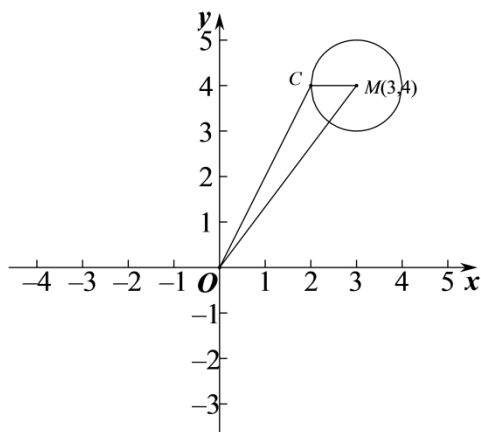
【专家解读】本题的特点是注重基础，本题考查了考查直线与圆，圆与圆的位置关系的应用，以及圆的几何性质的应用，考查数学运算、直观想象等学科素养。解题关键是圆的几何性质的应用。

3. 【高考北京】已知半径为 1 的圆经过点 $(3, 4)$ ，则其圆心到原点的距离的最小值为 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】A

【解析】设圆心 $C(x, y)$ ，则 $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 1$ ，化简得 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ ，所以圆心 C 的轨迹是以 $M(3, 4)$ 为圆心，1 为半径的圆，所以 $|OC| + 1 \geq |OM| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，所以 $|OC| \geq 5 - 1 = 4$ ，当且仅当 C 在线段 OM 上时取得等号，故选 A。



【命题意图】 本类题主要考查点与圆、直线与圆、圆与圆位置关系，以及考查逻辑思维能力、运算求解能力、数形结合的能力、方程思想的应用。

【考试方向】 这类试题考查根据给定直线、圆方程判断点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系，同时考查通过数形结合思想、充分利用圆的几何性质解决圆的切线、圆的弦长等问题。在考查形式上，主要要以选择题、填空题为主，有时也会出现在解答题中，中档题。

【学科素养】 数学运算、直观想象

【难点中心】 (一) 直线与圆的位置关系的判断方法

(1) 几何法：由圆心到直线的距离 d 与半径长 r 的大小关系来判断。

若 $d > r$ ，则直线与圆相离；

若 $d = r$ ，则直线与圆相切；

若 $d < r$ ，则直线与圆相交。

(2) 代数法

(二) 点与圆、圆与圆位置关系的判断方法，类似的也有几何法和代数法两种；

(三) 比较圆心距与两个圆的半径和与半径差的大小关系，特别是遇到参数问题时，如何建立等式或不等式是一个难点。

4. 【高考江苏卷 14】在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ， A 、 B 是圆 $C: x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 36$ 上的两个动点，满足 $PA = PB$ ，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____。

【答案】 $10\sqrt{5}$

【解析】 如图，作 PC 所在直径 EF ，交 AB 于点 D ，则：

$\because PA = PB$ ， $CA = CB = R = 6$ ， $\therefore PC \perp AB$ ， EF 为垂径。

要使面积 $S_{\triangle PAB}$ 最大，则 P 、 D 位于 C 两侧，并设 $CD = x$ ，

计算可知 $PC=1$ ，故 $PD=1+x$ ， $AB=2BD=2\sqrt{36-x^2}$ ，

故 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PD = (1+x)\sqrt{36-x^2}$ ，令 $x=6\cos\theta$ ，

$$S_{\triangle PAB} = (1+x)\sqrt{36-x^2} = (1+6\cos\theta) \cdot 6\sin\theta = 6\sin\theta + 18\sin 2\theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

记函数 $f(\theta) = 6\sin\theta + 18\sin 2\theta$ ，

$$\text{则 } f'(\theta) = 6\cos\theta + 36\cos 2\theta = 6(12\cos^2\theta + \cos\theta - 6),$$

$$\text{令 } f'(\theta) = 6(12\cos^2\theta + \cos\theta - 6) = 0, \text{ 解得 } \cos\theta = \frac{2}{3} \quad (\cos\theta = -\frac{3}{4} < 0 \text{ 舍去})$$

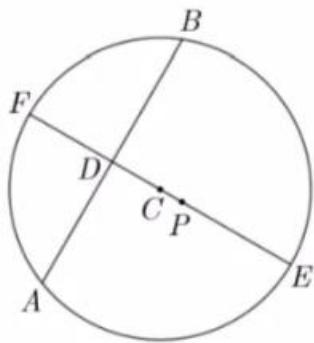
显然，当 $0 \leq \cos\theta < \frac{2}{3}$ 时， $f'(\theta) < 0$ ， $f(\theta)$ 单调递减；

当 $\frac{2}{3} < \cos\theta < 1$ 时， $f'(\theta) > 0$ ， $f(\theta)$ 单调递增；

结合 $\cos\theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 递减，故 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ 时 $f(\theta)$ 最大，此时 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，故

$$f(\theta)_{\max} = 6 \times \frac{\sqrt{5}}{3} + 36 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = 10\sqrt{5}, \text{ 即 } \triangle PAB \text{ 面积的最大值是 } 10\sqrt{5}.$$

(注：实际上可设 $\angle BCD = \theta$ ，利用直角 $\triangle BCD$ 可更快速计算得出该面积表达式)



讲考向

1. 已知含参数直线与圆位置关系，求直线方程中参数取值范围问题

画出圆，利用直线过定点，结合图像即可确定直线方程中满足的条件，利用直线与圆的位置关系和点到直线的距离公式，列出关于参数的不等式或方程，即可求出参数的范围。

例 1. (2021·北京门头沟区·高三一模) 在平面直角坐标系中，从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线，垂足为 M ，则点 $Q(2, 4)$ 与点 M 的距离的最小值是 ()

- A. $5-2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. 17

【答案】A

【分析】首先求出直线过定点 $N(1, -2)$ ，依题意可得 M 在以 PN 为直径的圆上，求出圆的方程，即可判断点 $Q(2, 4)$ 在圆外，求出 Q 到圆心的距离，减去半径即为距离最小值；

【解析】因为 $kx - y - 2 - k = 0$ ，所以 $k(x-1) - y - 2 = 0$ ，所以 $\begin{cases} x-1=0 \\ -y-2=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ，所以直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 过定点 $N(1, -2)$ ；

从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线，垂足为 M ，则 M 在以 PN 为直径的圆上，因为 $P(-3, 2)$ ， $N(1, -2)$ ，所以 PN 的中点为 $G(-1, 0)$ ， $|PN| = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$ ，所以圆 G 的方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 8$ ，即 M 的轨迹方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 8$ ，因为 $Q(2, 4)$ ， $(2+1)^2 + 4^2 > 8$ ，所以点 $Q(2, 4)$ 在圆外， $|QG| = \sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5$ ，所以 $|QM|_{\min} = |QG| - r = 5 - 2\sqrt{2}$ ，故选 A.

例 2. 如果直线 $2ax - by + 14 = 0 (a > 0, b > 0)$ 和函数 $f(x) = m^{x+1} + 1 (m > 0, m \neq 1)$ 的图象恒过同一个定点，

且该定点始终落在圆 $(x-a+1)^2 + (y+b-2)^2 = 25$ 的内部或圆上，那么 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$ B. $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$ C. $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$

【答案】C

【解析】函数 $f(x) = m^{x+1} + 1$ 恒过定点 $(-1, 2)$. 将点 $(-1, 2)$ 代入直线 $2ax - by + 14 = 0$ 可得 $-2a - 2b + 14 = 0$ ，即 $a + b = 7, (a > 0, b > 0)$. 由点 $(-1, 2)$ 在圆 $(x-a+1)^2 + (y+b-2)^2 = 25$ 内部或圆上可得

$(-1-a+1)^2 + (2+b-2)^2 \leq 25$ 即 $a^2 + b^2 \leq 25 (a > 0, b > 0)$. $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$. 所以点

(a, b) 在以 $A(3, 4)$ 和 $B(4, 3)$ 为端点的线段上运动. $\frac{b}{a}$ 表示以 $A(3, 4)$ 和 $B(4, 3)$ 为端点的线段上的点与坐标原

点连线的斜率. 所以 $\left(\frac{b}{a}\right)_{\min} = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$, $\left(\frac{b}{a}\right)_{\max} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$. 所以 $\frac{3}{4} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{4}{3}$. 故 C 正确.

2. 已知点满足与圆有关的某个条件，求圆中参数或点的坐标的取值范围问题

作出相应的图形，利用数形结合思想找出圆中相关量，如圆心坐标、圆心到某点距离、圆的半径、圆的弦长或圆的弦心距等满足的条件，列出不等式或方程或函数关系，再利用相关方法求出参数的范围.

例 1. 已知直线 $l: x + y - 1 = 0$ 截圆 $\Omega: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 所得的弦长为 $\sqrt{14}$ ，点 M, N 在圆 Ω 上，且直线

$l':(1+2m)x+(m-1)y-3m=0$ 过定点 P , 若 $PM \perp PN$, 则 $|MN|$ 的取值范围为_____ . 学科+网

【答案】 $[\sqrt{6}-\sqrt{2}, \sqrt{6}+\sqrt{2}]$

【解析】 依题意 $2\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}=\sqrt{14}$, 解得 $r=2$,

因为直线 $l':(1+2m)x+(m-1)y-3m=0$, 故 $P(1,1)$,

设 MN 的中点为 $Q(x,y)$, 则 $OM^2=OQ^2+MQ^2=OQ^2+PQ^2$, 即 $4=x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2$,

化简可得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, 所以点 Q 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心, $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 为半径的圆,

所以 $|PQ|$ 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right]$, 所以 $|MN|$ 的取值范围是 $[\sqrt{6}-\sqrt{2}, \sqrt{6}+\sqrt{2}]$.

3. 与距离有关的最值问题

在运动变化中, 动点到直线、圆的距离会发生变化, 在变化过程中, 就会出现一些最值问题, 如距离最小, 最大等常常涉及圆上一点到直线的距离最值问题、切线长最值问题、圆上动点与其他曲线两动点间的距离最值问题、过定点的圆的弦长最值问题等. 这些问题常常利用平面几何知识或圆的参数方程或设圆上点的坐标, 直接求出最值或转化为函数的最值问题, 利用函数求最值的方法求解, 与圆有关的长度最值问题有以下题型:

①圆外一点 A 到圆上距离最近为 $|AO|-r$, 最远为 $|AO|+r$;

②过圆内一点的弦最长为圆的直径, 最短为该点为中点的弦;

③直线与圆相离, 则圆上点到直线的最短距离为圆心到直线的距离 $d+r$, 最近为 $d-r$;

④过两定点的所有圆中, 面积最小的是以这两个定点为直径端点的圆的面积.

⑤圆上动点与其他曲线两动点间的距离最值问题, 常转化为圆心与曲线上的动点距离问题, 利用两点间距离公式转化二元函数的最值问题, 利用消元法转化一元函数在某个区间上的最值问题求解.

例 1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $(x_1-2)^2+y_1^2=5$, $x_2-2y_2+4=0$, 则 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 的最小值为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{121}{5}$ D. $\frac{11\sqrt{5}}{5}$

【答案】 B

【解析】由已知得点 (x_1, y_1) 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ 上，点 (x_2, y_2) 在直线 $x-2y+4=0$ 上，故 $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$ 表示 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ 的点和直线 $x-2y+4=0$ 上点的距离平方，而距离的最小值为 $\frac{|2+4|}{\sqrt{1+4}} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，故 $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$ 。故选 B

【温馨提醒】此类题要注意两点间距离公式的运用。

4. 与面积相关的最值问题

与圆的面积的最值问题，一般转化为寻求圆的半径相关的函数关系或者几何图形的关系，借助函数求最值的方法，如配方法，基本不等式法等求解，有时可以通过转化思想，利用数形结合思想求解。

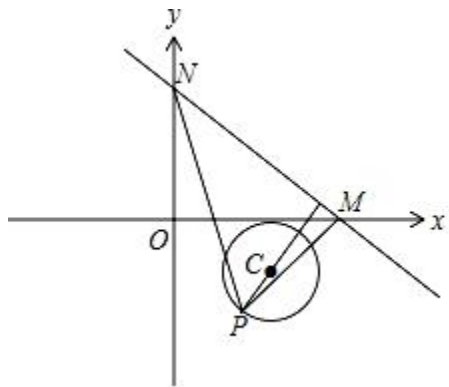
例 2. (2021·陕西西安市·高三月考(理)) 已知点 P 在圆 $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ 上，直线 $l: 3x+4y=12$ 与两坐标轴的交点分别为 M, N ，则 $\triangle PMN$ 的面积的最大值是 ()

- A. $\frac{15}{2}$ B. 8 C. $\frac{17}{2}$ D. 9

【答案】A

【分析】根据题意得圆心到直线的距离，然后根据 $d+r$ 计算点 P 到直线 l 的距离的最大值，再计算 $|MN|$ ，利用 $S = \frac{1}{2}|MN|(d+r)$ 计算 $\triangle PMN$ 面积最大值。

【解析】如图，当点 P 距离直线 $l: 3x+4y=12$ 的距离最大时， $\triangle PMN$ 的面积最大。



已知，圆 C 的圆心 $(2, -1)$ 到直线 $l: 3x+4y=12$ 的距离 $d = \frac{|6-4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$ ，

则圆 C 上的点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $d+r=2+1=3$ ，

又直线 $l: 3x+4y=12$ 与两坐标轴交点分别为 $M(4, 0), N(0, 3)$ ，所以 $|MN|=5$ ， $\therefore \triangle PMN$ 面积的最大值为

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}, \text{ 故选 A.}$$

例 3. 在平面直角坐标系中, A, B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x + y - 4 = 0$ 相切, 则圆 C 面积的最小值为_____.

【答案】 $\frac{4}{5}\pi$

【解析】 设直线 $l: 2x + y - 4 = 0$. 因为 $|OC| = \frac{1}{2}|AB| = d_{C-l}$, 所以圆心 C 的轨迹为以 O 为焦点, l 为准线的抛物线. 圆 C 半径最小值为 $\frac{1}{2}d_{O-l} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 圆 C 面积的最小值为 $\pi(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = \frac{4\pi}{5}$. 选 A.

【技能方法】 和圆的面积最值有关的问题. 就是求半径的最值, 注意观察几何图形.

5. 圆上点的坐标满足关系式的最值或取值范围问题

本类问题有三种解题思路, 思路 1: 充分利用所给式子的几何意义, 利用数形结合思想解题; 思路 2: 设所给式子等于 z , 代入圆的方程化为一元二次方程, 利用判别式即可求出参数的范围; 思路 3: 利用圆的参数方程或消元法化为函数问题, 利用函数求最值的方法求最值, 注意留下变量的范围.

例 1. 过点 $P(x, y)$ 作圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的切线, 切点分别为 A, B , 若 $|PA| = |PB|$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 8

【答案】 B

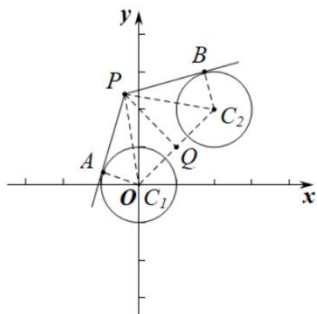
【分析】 首先根据 $|PA| = |PB|$, 圆 C_1 与 C_2 的半径相等, $\triangle PAC_1, \triangle PBC_2$ 为直角三角形, 得到 $|PC_1| = |PC_2|$, 进而得到点 P 在线段 C_1C_2 的垂直平分线上; 然后求出此平分线表达式, 得到点 P 的只含有 x 的坐标, 代入 $x^2 + y^2$, 得到二次函数, 求其最小值即可.

【解析】 如图所示, 由圆的切线的性质得 $C_1A \perp PA, C_2B \perp PB$, 在 $Rt\triangle PAC_1, Rt\triangle PBC_2$ 中有 $|PA|^2 = |PC_1|^2 - 1, |PB|^2 = |PC_2|^2 - 1$, 由题知 $|PA| = |PB|$, $\therefore |PC_1| = |PC_2|$, 所以点 P 在线段 C_1C_2 的垂直平分线上; 由题知 $C_1(0, 0), C_2(2, 2)$, 所以 C_1 与 C_2 的中点 Q 的坐标为 $(1, 1)$, C_1 与 C_2 所在直线的斜率为

$$k_1 = \frac{2-0}{2-0} = 1, \therefore P, Q \text{ 所在直线 } l_1 \text{ 的斜率为 } k_2 = \frac{-1}{k_1} = -1, \therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的方程为 } y = -1 \times (x-1) + 1, \text{ 即}$$

$y = -x + 2$, 点 $P(x, y)$ 在 $y = -x + 2$, 所以点 P 的坐标满足 $y = -x + 2$,

所以 $x^2 + y^2 = x^2 + (-x + 2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2$, 故选 B.



【点睛】本题主要考查直线与圆相切的性质及函数的最值；解题方法是根据已知条件，将 $x^2 + y^2$ 表示为只含有一个未知数 x 的函数，然后根据二次函数的特征求出其最小值；解题的关键点是找出点 P 所在的一条直线，进而用一个未知数 x 表示出其坐标，进而求得 $x^2 + y^2$ 的最小值。

例 2. 实数 x, y 满足 $3x^2 + 2y^2 = 6x$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的最大值为_____

【答案】2

【解析】由题： $y^2 = 3x - \frac{3}{2}x^2 \geq 0, \therefore 0 \leq x \leq 2$, 因此 $x^2 + y^2 = 3x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}$, 所以当 $x=2$ 时, $x^2 + y^2$ 取得最大值 4, 故 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 最大值为 2.

【反思提升】综上所述，解决与圆相关的最值问题的关键要善于利用数形结合思想，利用几何知识求最值，要善于利用转化与化归思想将最值问题转化为函数的最值求解。如 $(x-a)^2 + (y-b)^2$ 表示曲线上点 (x, y) 与点

(a, b) 之间距离的平方； $\frac{y-b}{x-a}$ 表示曲线上点 (x, y) 与点 (a, b) 连线的斜率； $z = Ax + By$ 注意将直线

$z = Ax + By$ 在坐标轴上的截距与 z 联系起来解题。

专题二十四 立体几何角的计算问题

在立体几何命题中，判定和证明空间的线线、线面以及面面之间的位置关系(主要是平行与垂直的位置关系)，计算空间图形中的几何量(主要是角与距离)是两类基本问题。正确揭示空间图形与平面图形的联系，并有效地实施空间图形与平面图形的转换是分析和解决这两类问题的关键。空间的角与距离的计算（特别是角的计算）

是高考热点,一般以大题的条件或一小问形式呈现,考查用向量方法解决立体几何问题,将空间几何元素之间的位置关系转化为数量关系,并通过计算解决立体几何问题.本文就高考命题中立体几何角的计算问题加以总结探讨,以提高高考获取高分.

一、异面直线所成的角的计算问题

①定义:设 a, b 是两条异面直线,过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 则 a' 与 b' 所夹的锐角或直角叫做 a 与 b 所成的角.

②范围:两异面直线所成角 θ 的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$.

③向量求法:设直线 a, b 的方向向量为 $\vec{a}, \vec{b}$, 其夹角为 φ , 则有 $\cos \theta = |\cos \varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. 利用直线的方向

向量的夹角求异面直线的夹角时,注意区别:当异面直线的方向向量的夹角为锐角或直角时,就是此异面直线所成的角;当异面直线的方向向量的夹角为钝角时,其补角才是异面直线所成的角.

④几何法:求异面直线所成角的步骤:一平移,将两条异面直线平移成相交直线.二定角,根据异面直线所成角的定义找出所成角.三求角,在三角形中用余弦定理或正弦定理或三角函数求角.四结论.

例 1. (2021·四川高三月考)在正四棱柱(底面为正方形且侧棱垂直于底面) $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BC=2AA_1$,

M 是 BC 的中点,则异面直线 BD_1 与 MC_1 所成角的大小为 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】C

【分析】设 B_1C_1 的中点为 N , 联结 BN, ND_1 , 作出异面直线 BD_1 与 MC_1 所成角 $\angle NBD_1$, 在 $\triangle BND_1$ 中, 求出各边长, 用余弦定理求出 $\angle NBD_1$.

【解析】设 B_1C_1 的中点为 N , 联结 BN, ND_1 , 则 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体, 而底面 $ABCD$ 为正方形,

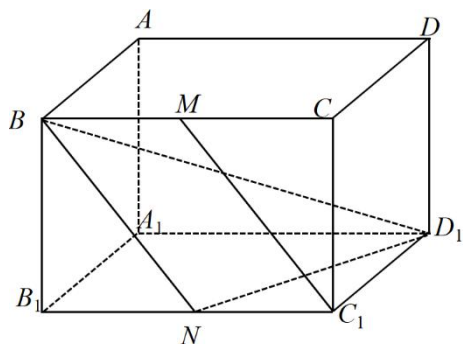
$\because M$ 是 BC 的中点, N 为 B_1C_1 的中点, $\therefore BN \parallel C_1M$, 则 $\angle BND_1$ (或其补角) 即为异面直线 BD_1 与 MC_1 所成角. 不

妨 设 $BC=2$, 则 $BB_1=AA_1=1$, $B_1N = \frac{1}{2} B_1C_1 = 1$, 则

$$BN = \sqrt{B_1N^2 + BB_1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, D_1N = \sqrt{C_1N^2 + C_1D_1^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$$

$$BD_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

在 $\triangle BND_1$ 中, 由余弦定理得: $\cos \angle NBD_1 = \frac{NB^2 + BD_1^2 - ND_1^2}{2NB \times BD_1} = \frac{2+9-5}{2 \times \sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle NBD_1 = \frac{\pi}{4}$, 故选 C.

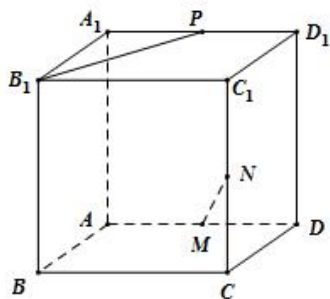


【点睛】求异面直线所成角的方法：

(1) 几何法：将两条直线或其中一条平移（找出平行线）至它们相交，把异面转化为共面，用余弦定理或正弦定理来求（一般是余弦定理）；一般采用平行四边形或三角形中位线来构造平行线；

(2) 向量法：建立适当的空间直角坐标系，通过计算向量夹角（直线方向向量与直线方向向量、直线方向向量与平面法向量，平面法向量与平面法向量）余弦值，即可求出结果。

例 2. (2021·安徽马鞍山市·高三一模(文)) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M ， N ， P 分别为棱 AD ， CC_1 ， A_1D_1 的中点，则 B_1P 与 MN 所成角的余弦值为 ()



A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$

B. $-\frac{1}{5}$

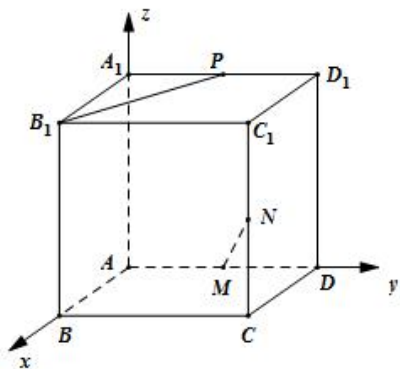
C. $\frac{\sqrt{70}}{10}$

D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

【分析】如图以 A 为原点，分别以 AB, AD, AA_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{B_1P}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标，设 B_1P 与 MN 所成的角为 θ ，利用 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{B_1P}| \cdot |\overrightarrow{MN}|}$ 即可求解。

【解析】如图以 A 为原点，分别以 AB, AD, AA_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



设正方体的棱长为 2, 则 $M(0,1,0)$, $N(2,2,1)$, $B_1(2,0,2)$, $P(0,1,2)$, 所以 $\overrightarrow{B_1P} = (-2,1,0)$, $\overrightarrow{MN} = (2,1,1)$,

设 B_1P 与 MN 所成的角为 θ , 所以 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{B_1P}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{|-2 \times 2 + 1|}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$, B_1P 与 MN 所成角的余弦值为

$\frac{\sqrt{30}}{10}$, 故选 A.

例 3. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle SAD$ 为等边三角形, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, 其中 $AD = 2AB = 2BC$, $\angle CBA = \angle BAD = 90^\circ$, 若 E, F 分别是线段 SA 与线段 SC 的中点, 则直线 BE 和 DF 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

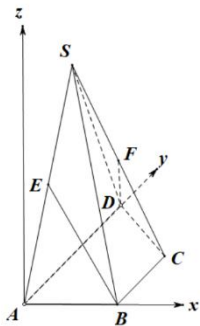
D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

【答案】A

【解析】过点 A 作线段 AF, AB 的垂线作为 z 轴, 以 AB, AF 为 x, y 轴, 建立空间直角坐标系, 设

$AD = 2AB = 2BC = 2$, 则 $E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), F(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}), B(1, 0, 0), D(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{DF} = (\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

所以直线 BE 和 DF , 所成角的余弦值为 $\frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF}|}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{DF}|} = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}|}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{8}$ 故选 A.



【点睛】本题主要考查了求异面直线所成角，属于中档题.

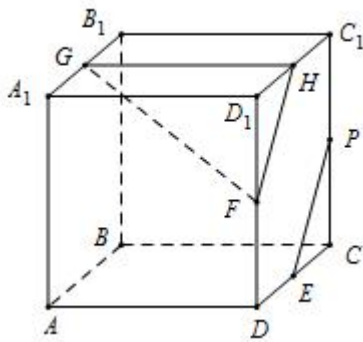
例 4. (2021·安徽名校联考) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 E, F, G 分别为 CD, D_1D, A_1B_1 的中点, P 为平面 CDD_1C_1 内任一点, 设异面直线 GF 与 PE 所成的角为 α , 则 $\cos \alpha$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

【答案】C

【分析】首先判断出角 α 取得最小值时, 即为直线 GF 与平面 CDD_1C_1 所成的角, 可知角 $\angle GFH$ 为 GF 与平面 CDD_1C_1 所成的角, 利用三角函数值计算余弦值.

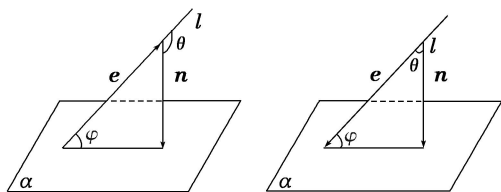
【解析】若 $\cos \alpha$ 取得最大值, 则 α 取得最小值, 因为 P 为平面 CDD_1C_1 内任一点, 由直线与平面所成角的定义可知, 直线 GF 与平面 CDD_1C_1 所成的角为直线 GF 与平面 CDD_1C_1 内的所有直线所成角的最小角, 所以 α 的最小值为 GF 与平面 CDD_1C_1 所成的角, 如图所示, H 为 D_1C_1 中点, 可知 HF 即为 GF 在平面 CDD_1C_1 内的射影, 设正方体的边长为 2, 则可得 $HF = \sqrt{2}, GH = 2$, 所以 $GF = \sqrt{6}$, 从而得到 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 C.



二、直线和平面所成角的计算问题

向量法求线面角的方法:

- (1) 分别求出斜线和它在平面内的射影直线的方向向量, 转化为求两个方向向量的夹角(或其补角);
- (2) 通过平面的法向量来求, 即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角(钝角时取其补角), 取其余角就是斜线和平面所成的角.
- (3) 如图所示, 设直线 l 的方向向量为 e , 平面 α 的法向量为 n , 直线 l 与平面 α 所成的角为 φ , 两向量 e 与 n 的夹角为 θ , 则有 $\sin \varphi = |\cos \theta| = \frac{|e \cdot n|}{|e||n|}$.



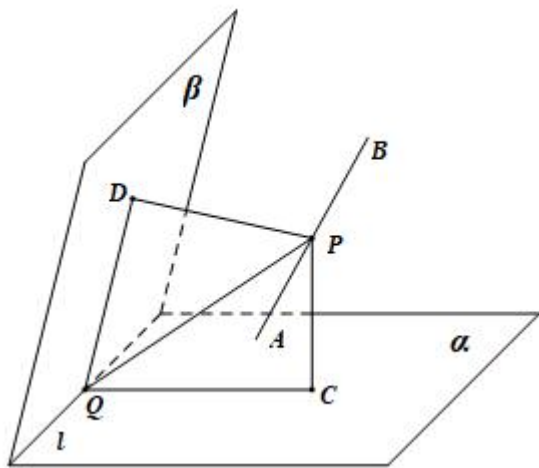
例 1. (2021·江苏徐州市·徐州一中高三期末) 已知平面 α 与 β 所成锐二面角的平面角为 80° , P 为 α, β 外一定点, 过点 P 的一条直线与 α 和 β 所成的角都是 30° , 则这样的直线有且仅有 ()

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

【答案】D

【分析】先将题目问题转化为 P 点与直线 PC, PD 所成角为 60° 的直线有几条, 得出满足条件的直线有 4 条.

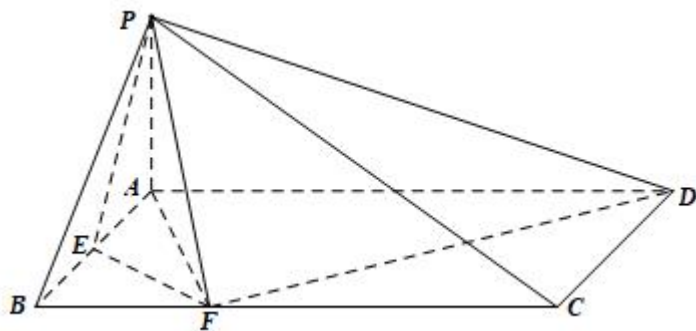
【解析】如图, 过 P 作 α, β 的垂线 PC, PD , 其确定的平面与棱 l 交于 Q , 若二面角为 80° , AB 与平面 α, β 成 30° 角, 则 $\angle CPD = 100^\circ$, AB 与 PC, PD 成 60° 角, 因此问题转化为过 P 点与直线 PC, PD 所成角为 60° 的直线有几条.



$\therefore \frac{100^\circ}{2} < 60^\circ, \frac{80^\circ}{2} < 60^\circ$, 所以这样的直线有 4 条, 故选 D.

【点睛】解答本题关键在于能利用直线与直线、直线与平面、平面与平面关系的相互转化, 通过严密推理, 得出本题的答案.

例 2. (2021·河南名校联盟)《九章算术》卷五《商功》中描述几何体“阳马”为“底面为矩形, 一棱垂直于底面的四棱锥”. 现有阳马 $P-ABCD$ (如图), $PA \perp$ 平面 $ABCD$. $PA = AB = 1$, $AD = 3$, 点 E, F 分别在 AB, BC 上, 当空间四边形 $PEFD$ 的周长最小时, 直线 PA 与平面 PFD 所成角的正切值为 ()



A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

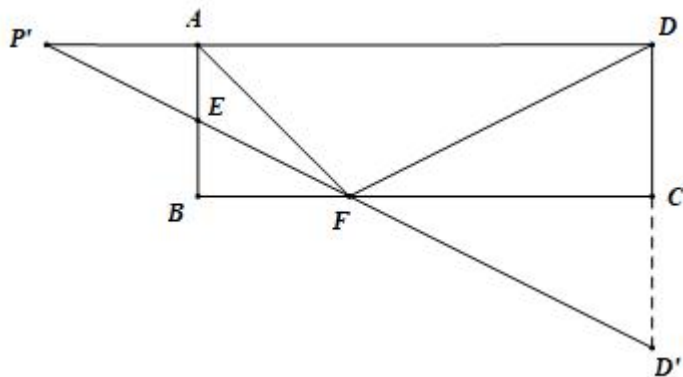
C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】把平面 PAB 展开到与平面 $ABCD$ 共面的 $P'AB$ 的位置，根据图象可得当 P' ， E ， F ， D' 四点共线时，空间四边形 $PEFD$ 的周长最小，进而可求得各个边长，过点 A 作 $AG \perp FD$ ，垂足为 G ，连接 PG ，可证 $FD \perp$ 平面 PAG ，所以平面 $PAG \perp$ 平面 PFD ，所以 $\angle APG$ 即为直线 PA 与平面 PFD 所成的角，再求得各个边长，代入公式，即可求得答案。

【解析】把平面 PAB 展开到与平面 $ABCD$ 共面的 $P'AB$ 的位置(如下图)，



延长 DC 到 D' ，使得 $CD' = 1$ ，则 $DF = D'F$ ，

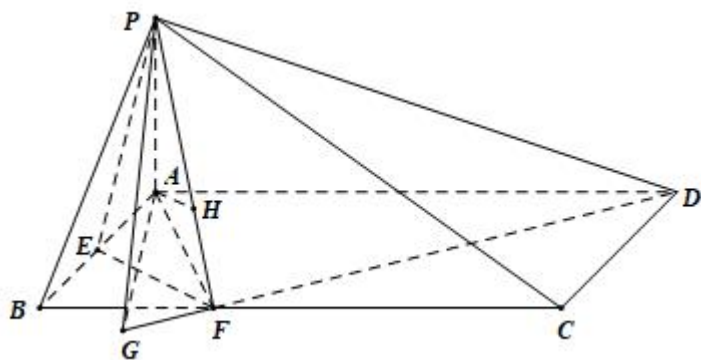
因为 PD 的长度为定值，故只需 $PE + EF + FD = P'E + EF + FD'$ 最小，只需 P' ， E ， F ， D' 四点共线，

因为 $P'D = 4$ ， $DD' = 2$ ， $\frac{CF}{P'D} = \frac{CD'}{DD'}$ ，所以 $CF = 2$ 。

过点 A 作 $AG \perp FD$ ，垂足为 G ，连接 PG ，因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $FD \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PA \perp FD$ ，则 $FD \perp$ 平面 PAG ，所以平面 $PAG \perp$ 平面 PFD ，过 A 作 $AH \perp PG$ ，垂足为 H ，则 $AH \perp$ 平面 PFD ，所以 $\angle APG$ 即为直线 PA 与平面 PFD 所成的角。

因为 $\triangle AFD$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ， $FD = \sqrt{5}$ ，所以 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times AG = \frac{3}{2}$ ，所以 $AG = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，所以

$$\tan \angle APG = \frac{AG}{AP} = \frac{3\sqrt{5}}{5}，故选 A.$$



【点睛】难点在于，需将平面 PAB 展开到与平面 $ABCD$ 共面的位置，当 P' ， E ， F ， D 四点共线时，空间四边形 $PEFD$ 的周长最小，求得各个边长，再根据面面垂直的判定定理及线面角的定义求解即可，考查数形结合，推理证明的能力，属中档题。

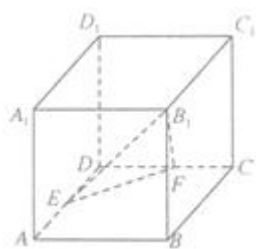
例 3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， E ， F 分别为 AD ， DC 的中点，则 B_1B 与平面 B_1EF 所成角的正弦值为（ ）

A. $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

B. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

D. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$



【答案】B

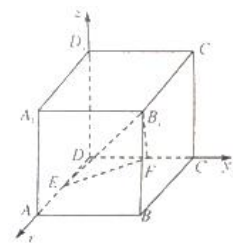
【解析】由题意，分别以 DA ， DC ， DD_1 所在的直线为 x ， y ， z 轴，建立如图所示坐标系，则 $B(2,2,0)$ ， $E(1,0,0)$ ， $F(0,1,0)$ ， $B_1(2,2,2)$ ，可得 $\overrightarrow{EF} = (-1,1,0)$ ， $\overrightarrow{EB_1} = (1,2,2)$ ， $\overrightarrow{BB_1} = (0,0,2)$ ，

设平面 B_1EF 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = -x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB_1} = x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = y \\ z = -\frac{3}{2}y \end{cases}$ ，

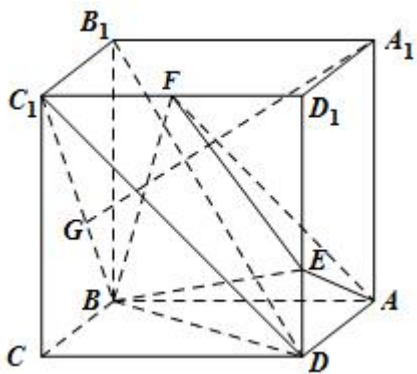
不妨令 $y = 2$ ，取 $\vec{n} = (2, 2, -3)$ 。

设 B_1B 与平面 B_1EF 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos(n, \overrightarrow{BB_1}) \right| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BB_1}|} = \frac{|2 \times 0 + 2 \times 0 + (-3) \times 2|}{2 \times \sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$, 故选 B.

【点睛】 本题主要考查了直线与平面所成角的求解, 以及空间向量的应用, 其中解答中建立适当的空间直角坐标系, 求得平面的法向量, 结合向量的夹角公式求解是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.



例 4. (2021·湖北九师联盟 2 月联考) 如图, 在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 DD_1 上一点, 且 $DE=2$, F 为棱 C_1D_1 的中点, 点 G 是线段 BC_1 上的动点, 则下列叙述不正确的是 ()



- A. 无论点 G 在线段 BC_1 上如何移动, 都有 $A_1G \perp B_1D$
- B. 四面体 $A-BEF$ 的体积为 24
- C. 直线 AE 与 BF 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{10}}{15}$
- D. 直线 A_1G 与平面 BDC_1 所成最大角的余弦值为 $\frac{1}{3}$

【答案】C

【分析】 根据 $DB_1 \perp$ 面 A_1BC_1 判断 A; 利用“等积变换”求出体积判断 B; 求出直线 AE 与 BF 所成角的余弦值判断 C; 根据当点 G 移动到 BC_1 的中点时 $\angle A_1GO$ 最大可判断 D.

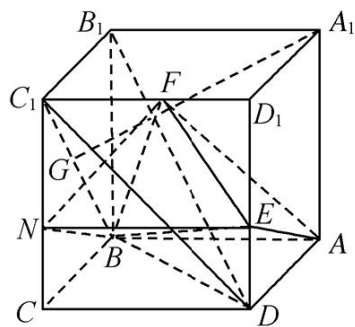
【解析】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 易证 $DB_1 \perp$ 面 A_1BC_1 , 又 $A_1G \subset$ 平面 A_1BC_1 , 所以 $A_1G \perp B_1D$, 则 A

正确; $V_{\text{三棱锥}A-BEF} = V_{\text{三棱锥}F-ABE} = V_{\text{三棱锥}D_1-ABE} = V_{\text{三棱锥}B-AD_1E} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 6 = 24$, 则 B 正确; 在棱 CC_1 上取

点 N , 使 $CN = 2$, 连结 BN, NE, FN (如图), 则易知 $\angle FBN$ 为直线 AE 与 BF 所成角或其补角, 可得

$$BN = 2\sqrt{10}, FN = 5, FB = 9, \text{ 则 } \cos \angle FBN = \frac{(2\sqrt{10})^2 + 9^2 - 5^2}{2 \times 9 \times 2\sqrt{10}} = \frac{8}{3\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{15}, \text{ 则直线 } AE \text{ 与 } BF \text{ 所成角}$$

的余弦值为 $\frac{4\sqrt{10}}{15}$, 则 C 错误;

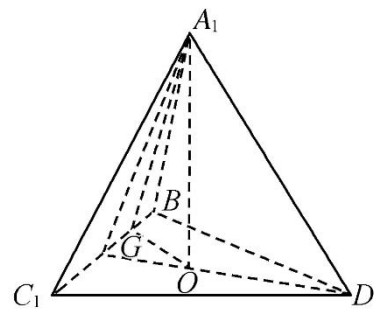


由题意知三棱锥 $A_1 - BDC_1$ 为棱长为 $6\sqrt{2}$ 的正四面体, 作 $A_1O \perp$ 平面 BDC_1 , O 为垂足, 则 O 为正 $\triangle BDC_1$ 的中

心, 且 $\angle A_1GO$ 为直线 A_1G 与平面 BDC_1 所成角, 所以 $\cos \angle A_1GO = \frac{OG}{A_1G} = \sqrt{1 - \frac{A_1O^2}{A_1G^2}}$, 当点 G 移动到 BC_1 的

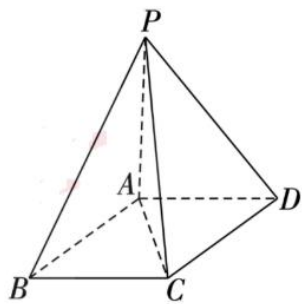
中点时, A_1G 最短, 如图, 此时 $\cos \angle A_1GO$ 最小, $\angle A_1GO$ 最大,

此时 $\cos \angle A_1GO = \frac{OG}{A_1G} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$, 则 D 正确. 故选 C .



【点睛】 本题通过对多个命题真假的判断, 综合考查空间线面垂直证明线线垂直、异面直线成的角、直线与平面成的角, 属于难题. 这种题型综合性较强, 也是高考的命题热点, 同学们往往因为某一处知识点掌握不好而导致“全盘皆输”, 因此做这类题目更要细心、多读题, 尽量挖掘出题目中的隐含条件, 另外, 要注意从简单的自己已经掌握的知识点入手, 然后集中精力突破较难的命题.

例 5. (2021·江苏常州市·高三开学考试) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB = AP = 2BC$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45° .



- (1) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求直线 PB 与平面 PAC 所成的角的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【分析】(1) 利用面面垂直的性质定理得出 $BC \perp$ 平面 PAB , 可得出 $BC \perp PA$, 推导出 $\triangle PAC$ 为等腰直角三角形, 可得出 $PA \perp AC$, 利用线面垂直的判定定理可证得 $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 在底面 $ABCD$ 内, 过点 B 作 $BH \perp AC$, 垂足为 H , 连接 PH , 设 $BC = a$, 推导出 $\angle BPH$ 为直线 PB 与平面 PAC 所成角, 计算出 BH 、 PB , 进而可计算得出 $\sin \angle BPH$.

【解析】(1) 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $BC \perp AB$,

又因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$.

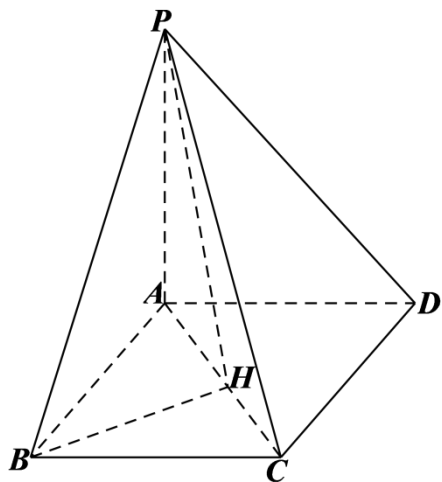
所以 $BC \perp$ 平面 PAB , 又因为 AB 、 PA 、 $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp AB$, $BC \perp PA$, $BC \perp PB$,

从而 $\angle PBA$ 是二面角 $P-BC-A$ 的平面角, 因为二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45° , 所以 $\angle PBA = 45^\circ$,

在 $\triangle PAB$ 中, $AB = PA$, 所以 $\angle BPA = \angle PBA = 45^\circ$, 所以 $\angle PBA = 90^\circ$, 即 $AB \perp AP$,

又因为 $BC \perp PA$, $AB \cap BC = B$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 在底面 $ABCD$ 内, 过点 B 作 $BH \perp AC$, 垂足为 H , 连接 PH ,



由 (1) 知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $BH \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BH$,

又因为 $BH \perp AC$, $PA \cap AC = A$, 所以 $BH \perp$ 平面 PAC , 从而 $\angle BPH$ 为直线 PB 与平面 PAC 所成角,

设 $BC = a$, 则 $AB = AP = 2a$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a$,

所以, $BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $PB = \sqrt{PA^2 + AB^2} = 2\sqrt{2}a$,

所以直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\sin \angle BPH = \frac{BH}{PB} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

【点睛】方法点睛：求直线与平面所成角的方法：

- (1) 定义法, ①作, 在直线上选取恰当的点向平面引垂线, 确定垂足的位置是关键;
②证, 证明所作的角为直线与平面所成的角, 证明的主要依据是直线与平面所成角的概念;
③求, 利用解三角形的知识求角;

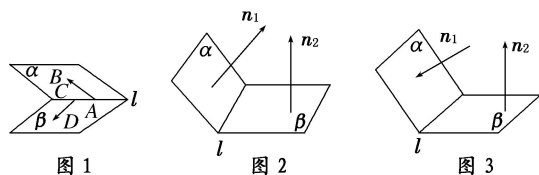
(2) 向量法, $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|}$ (其中 AB 为平面 α 的斜线, $\vec{n}$ 为平面 α 的法向量, θ 为斜线

AB 与平面 α 所成的角).

三、二面角的计算问题

(1) 二面角的平面角及其求法有：定义法、三垂线定理及其逆定理、找公垂面法、射影公式、向量法等，依据题目选择方法求出结果.

(2) 如图 1, AB 、 CD 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的直线，则二面角的大小 $\theta = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle$.



(3) 如图 2、3, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面 α, β 的法向量，则二面角的大小 $\theta = \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$ (或 $\pi - \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$).

例 1. (2021 江苏镇江市·高三期中) 已知二面角 $\alpha-l-\beta$, 其中平面的一个法向量 $\vec{m} = (1, 0, -1)$, 平面 β 的一个法向量 $\vec{n} = (0, -1, 1)$, 则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小可能为 ()

- A. 60° B. 120° C. 60° 或 120° D. 30°

【答案】C

【解析】 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = 120^\circ$ ，又因为二面角的大小与法向量夹角相等或互补，所以二面角的大小可能是 60° 或 120° ，故选 C.

例 2. 已知四面体 $ABCD$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle DAB = 45^\circ$ ， $\angle DAC = 60^\circ$ ，则二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】在 AD 上取 $AO=1$ ，过 O 作 $ON \perp AD$ ，交 AB 于 N ，作 $OM \perp AD$ ，交 AC 于 M ，连接 MN ，所以 $\angle MON$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角，

在 $\text{Rt}\triangle AON$ 中， $\angle OAN = 45^\circ$ ， $OA=1$ ，所以 $ON=1$ ， $AN=\sqrt{2}$ ，

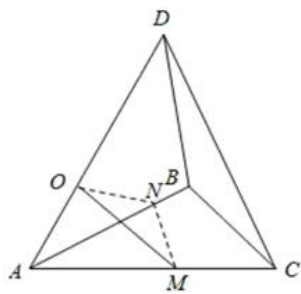
在 $\text{Rt}\triangle AOM$ 中， $\angle OAM = 60^\circ$ ， $OA=1$ ，所以 $OM=\sqrt{3}$ ， $AM=2$ ，

因为 $\angle BAC = 90^\circ$ ，所以 $MN=\sqrt{6}$ ，

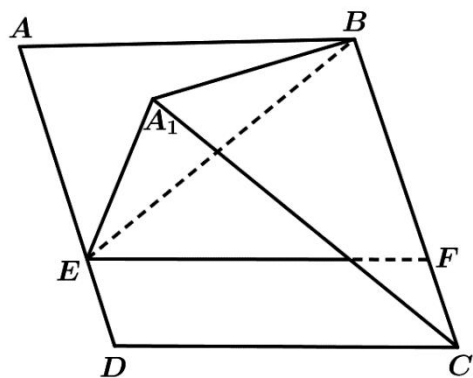
在 $\triangle NOM$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle MON = \frac{ON^2 + OM^2 - MN^2}{2ON \cdot OM} = \frac{1^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故选 B.

【点睛】本题考查了二面角的平面角，求二面角的大小，余弦定理解三角形，属于简单题.



例 3. (2021·浙江高三月考) 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=2\sqrt{3}$ ， $AD=3$ ， E 、 F 分别为边 AD 、 BC 上的点，且 $AE=BF=2$ ，现将 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 折成 $\triangle A_1BE$ ，使得点 A_1 在平面 $BCDE$ 上的射影在四边形 $CDEF$ 内 (不含边界)，设二面角 A_1-BE-C 的大小为 θ ，直线 A_1B 与平面 $BCDE$ 所成的角为 α ，直线 A_1E 与直线 BC 所成角为 β ，则 ()

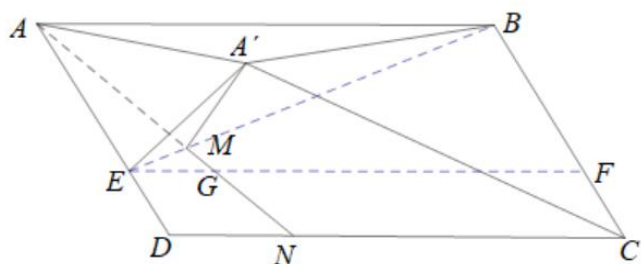


- A. $\beta < \alpha < \theta$ B. $\beta < \theta < \alpha$ C. $\alpha < \beta < \theta$ D. $\alpha < \theta < \beta$

【答案】D

【分析】根据题意作出相应的二面角，线面角，线线角，结合点 A_1 在平面 $BCDE$ 上的射影求解.

【解析】过 A 作 BE 的垂线，分别交 EB ， EF ， DC 于 M ， G ， N ，如图，



显然 $\angle A'MN = \theta$. 因为 $BC \parallel AD$ ，所以直线 $A'E$ 与 AD 所成角即为 β .

当 A' 在平面 $BCDE$ 上的射影为 G 时， $AE \perp$ 平面 $A'EF$ ，此时 $\beta = \frac{\pi}{2}$.

于是当 A' 在平面 $BCDE$ 上的射影在线段 GN 上时， $\angle A'ED < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\beta = \angle A'ED$.

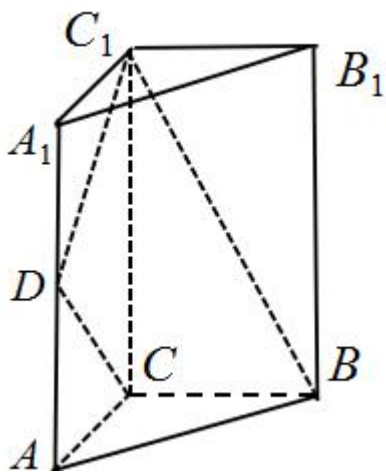
由于 $EA = EA'$ ， $MA = MA'$ ，进而得 $\angle EAA' = \frac{\beta}{2}$ ， $\angle MAA' = \frac{\theta}{2}$.

因为 AM 是 AA' 在平面 $ABCD$ 上的射影，所以由线面角最小性知 $\angle EAA' = \frac{\beta}{2} > \angle MAA' = \frac{\theta}{2}$ ，即 $\beta > \theta$.

再由二面角的最大性知 $\theta > \alpha$ ，故选 D.

【点睛】关键点点睛：根据二面角平面角、线面角、异面直线所成的角的定义，分别在图形中作出或找到 β, θ, α 是解题的关键，再根据位置分析角的变化范围即可比较大小.

例 4. (2021·江苏连云港调研) 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=1$, $AA_1=2$, D 是棱 AA_1 的中点, $DC_1 \perp BD$. 则下列叙述不正确的是 ()



- A. 直线 DC_1 与 BC 所成角为 90° B. 三棱锥 $D-BCC_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}$
- C. 二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 60° D. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为 6π

【答案】C

【分析】四个选项互不相关的选择题, 需要对各个选项一一验证.

对于 A: 证明 $DC_1 \perp BCD$, 得到 $DC_1 \perp BC$, 即直线 DC_1 与 BC 所成角为 90° ;

对于 B: 先证明 $BC \perp CDC_1$, 利用等体积法 $V_{D-BCC_1} = V_{B-DCC_1}$ 求得体积;

对于 C: 利用向量法求出二面角 A_1-BD-C_1 的大小;

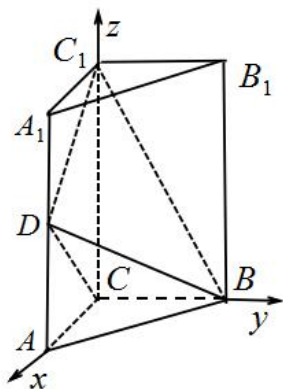
对于 D: 把直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 扩充成长方体, 求长方体的外接球体积即可.

【解析】对于 A: 在 $Rt\triangle DAC$ 中, $AD=AC=1$, 得 $\angle ADC=45^\circ$, 同理: $\angle A_1DC_1=45^\circ$, 所以 $\angle CDC_1=90^\circ$, 所以 $DC_1 \perp DC$, 又 $DC_1 \perp BD$, 且 $DC \cap BD = D$, 所以 $DC_1 \perp BCD$, 所以 $DC_1 \perp BC$, 即直线 DC_1 与 BC 所成角为 90° , 故 A 正确;

对于 B: 由 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, 得 $CC_1 \perp ABC$, 所以 $CC_1 \perp BC$, 由 A 的证明可知 $DC_1 \perp BC$, 可得 $BC \perp CDC_1$, 所以 $V_{D-BCC_1} = V_{B-DCC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle DCC_1} \times BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{3}$, 故 B 正确;

对于 C: 由 A、B 证明过程可知: $CC_1 \perp ABC$ 且 $AB \perp BC$, 可以以 C 坐标原点, $\overrightarrow{CA}$ 为 x 轴正方向, $\overrightarrow{CB}$ 为

y 轴正方向, $\overrightarrow{CC_1}$ 为 z 轴正方向, 建立空间直角坐标系, 则



$$C(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C_1(0,0,2), A_1(1,0,2), B_1(0,1,2), D(1,0,1),$$

所以 $\overrightarrow{DA_1} = (0,0,1), \overrightarrow{DB} = (-1,1,-1), \overrightarrow{DC_1} = (-1,0,1)$.

设平面 A_1BD 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则有 $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{DA_1}, \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{DB}$,

$$\text{即 } \begin{cases} z_1 = 0 \\ -x_1 + y_1 - z_1 = 0 \end{cases}, \text{不妨设 } x_1 = 1, \text{ 则有 } \vec{n}_1 = (1, 1, 0).$$

同理可求平面 C_1BD 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (1, 2, 1)$.

设二面角 A_1-BD-C_1 的平面角为 θ , 显然 θ 为锐角,

$$\text{所以 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D: 由 A、B 证明过程可知: $CC_1 \perp ABC$ 且 $AB \perp BC$, 可以把直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 扩充成长方体, 只需求长方体的外接球表面积即可.

$$\text{在长方体中, 设外接球的半径为 } R, \text{ 则 } 2R = \sqrt{AC^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \text{ 所以 } S = 4\pi R^2 = 6\pi,$$

故 D 正确. 故选 C.

【点睛】 立体几何试题的基本结构:

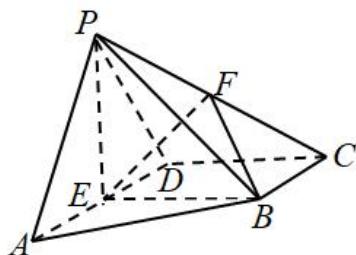
(1) 一是几何关系的证明, 用判定定理;

(2) 二是计算, 求角或求距离 (求体积通常需要先求距离), 通常可以建立空间直角坐标系, 利用向量法计算;

(3) 多面体的外接球问题解题关键是找球心和半径, 求半径的方法有: ①公式法; ②多面体几何性质法; ③形法; ④寻求轴截面圆半径法; ⑤确定球心位置法.

例 5. (2021·湖北武汉市·高三月考) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形,

$BC \parallel AD$, $\angle ADC = 90^\circ$, $BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$, $PA = PD$, E, F 分别为 AD, PC 的中点.



- (1) 求证: $PA \parallel$ 平面 BEF ;
 (2) 若 PC 与 AB 所成角为 45° , 求二面角 $F-BE-A$ 的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

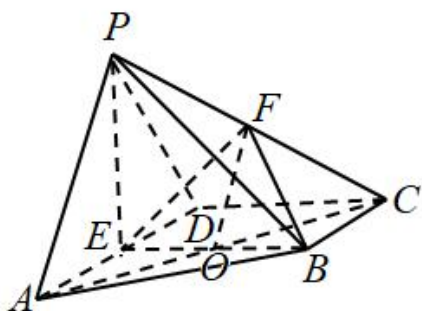
【分析】(1) 连接 AC 交 BE 于 O , 并连接 FO , 根据条件可证 $OF \parallel PA$, 从而可证明结论.

(2) 由 $ABCE$ 为平行四边形可得 $EC \parallel AB$, $\angle PCE$ 为 PC 与 AB 所成角, 即 $\angle PCE = 45^\circ$, 又由条件可得 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $PE = EC = \sqrt{2}$, 取 PD 中点 M , 连 ME, MA, MF , 可得 $\angle MEA$ 为 $F-BE-A$ 的平面角, 可得答案.

【解析】(1) 证明: 连接 AC 交 BE 于 O , 并连接 FO ,

$\because BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD$, E 为 AD 中点, $\therefore AE \parallel BC$, 且 $AE = BC$, $\therefore$ 四边形 $ABCE$ 为平行四边形, $\therefore O$

为 AC 中点, 又 F 为 AD 中点, $\therefore OF \parallel PA$, $\because OF \subset$ 平面 $BEF, PA \not\subset$ 平面 BEF , $\therefore PA \parallel$ 平面 BEF .



(2) 由 $BCDE$ 为正方形可得 $EC = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}$.

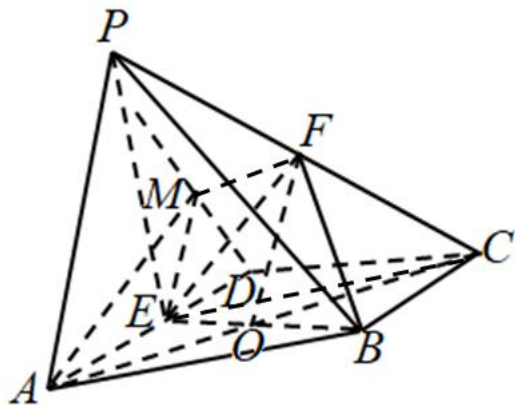
由 $ABCE$ 为平行四边形可得 $EC \parallel AB$. $\therefore \angle PCE$ 为 PC 与 AB 所成角, 即 $\angle PCE = 45^\circ$.

$\because PA = PD$ E 为 AD 中点, 所以 $PE \perp AD$.

$\because$ 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 侧面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD, PE \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore PE \perp \text{平面 } ABCD$, $\therefore PE \perp EC$, $\therefore PE = EC = \sqrt{2}$.

取 PD 中点 M , 连 ME, MA, MF ,



由 M, F , 分别为 PD, PC 的中点, 所以 $MF \parallel CD$, 又 $CD \parallel BE$, 所以 $MF \parallel BE$, 所以 B, E, M, F 四点共面. 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, BE \perp AD$,

$\therefore BE \perp$ 平面 PAD , $EM, AE \subset$ 平面 PAD , 所以 $BE \perp AE, BE \perp EM$, 则 $\angle MEA$ 为 $F-BE-A$ 的平面

角. 又 $\because EM = \frac{\sqrt{3}}{2}, AE = 1, AM = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $\therefore \cos \angle MEA = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以二面角 $F-BE-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题考查证明线面平行和求二面角的平面角, 解答本题的关键是取 PD 中点 M , 连 ME, MA, MF , 证明出 $BE \perp AE, BE \perp EM$, 得到 $\angle MEA$ 为 $F-BE-A$ 的平面角, 属于中档题.

【反思提升】(1)运用空间向量坐标运算求空间角的一般步骤: ①建立恰当的空间直角坐标系; ②求出相关点的坐标; ③写出向量坐标; ④结合公式进行论证、计算; ⑤转化为几何结论.

(2)求空间角注意: ①两条异面直线所成的角 α 不一定是直线的方向向量的夹角 β , 即 $\cos \alpha = |\cos \beta|$; ②两平面的法向量的夹角不一定是所求的二面角, 有可能为两法向量夹角的补角; ③直线和平面所成的角的正弦值等于平面法向量与直线方向向量夹角的余弦值的绝对值, 注意函数名称的变化.

专题二十五椭圆、双曲线、抛物线的几何性质的应用

圆锥曲线与方程是高考考查的核心内容之一，在高考中一般有 1~2 个选择或者填空题，一个解答题. 选择或者填空题有针对性地考查椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程和简单几何性质及其应用，主要针对圆锥曲线本身，综合性较小，试题的难度一般不大；解答题主要是以椭圆为基本依托，考查椭圆方程的求解、考查直线与曲线的位置关系. 要求学生有较强的计算能力，才能顺利解答. 从实际教学来看，这部分知识是学生比较头疼的题目. 分析原因，主要是学生没有形成解题的模式和套路，以及运算能力不足造成，以至于遇到类似的题目便产生畏惧心理. 本文就高中阶段出现这类问题加以类型的总结和方法的探讨.

一、椭圆、双曲线、抛物线定义的应用

圆锥曲线的定义是圆锥曲线问题的根本，利用圆锥曲线的定义解题是高考考查圆锥曲线的一个重要命题点，在历年的高考试题中曾多次出现. 需熟练掌握.

例 1. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作斜率大于 0 的直线 l 交抛物线于 A , B 两点 (A 在 B 的上方),

且 l 与准线交于点 C , 若 $\overline{CB} = 4\overline{BF}$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} =$ ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. 2

【答案】A

【解析】分别过 A, B 作准线的垂线，垂足分别为 A_1, B_1 ，设 $|BF| = x, |AF| = y$ ，则，

$$\frac{|BB_1|}{|BC|} = \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|AA_1|}{|AC|}, \therefore \frac{y}{y+x+4x} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}, \text{ 故选 A.}$$

例 2. (2021·江西八校联考) 已知点 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16-a^2} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点，点 M 是 C

右支上的一点. 直线 MF_1 与 y 轴交于点 P , $\triangle MPF_2$ 的内切圆在边 PF_2 上的切点为 Q , 若 $|PQ| = 2\sqrt{3}$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B. 3 C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

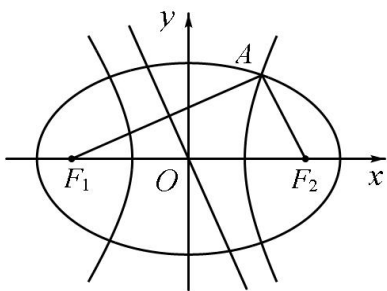
【解析】如图所示，

因为点 A 关于 C_2 的一条渐近线的对称点为 F_1 ，则 C_2 的一条渐近线是线段 AF_1 的中垂线，所以 $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$ ，

故 $AF_1^2 + AF_2^2 = 4c^2$ ③，

由①②可得 $AF_1^2 + AF_2^2 = 2a^2 + 2m^2$ ④，

所以 $a^2 + m^2 = 2c^2$ ，所以 $\frac{2}{e_1^2} + \frac{2}{e_2^2} = 4$ ，故选 D 。



【关键点点睛】本题的解题关键是利用数形结合和定义找关系，得到 $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$ ，再由勾股定理可得二次齐次式，进而可得离心率的关系。

二、椭圆、双曲线、抛物线的几何性质

圆锥曲线的简单几何性质是圆锥曲线的重点内容，主要考查椭圆与双曲线的离心率的求解、双曲线的渐近线方程的求解，难度中档。

例 1. (2021·北京石景山区·高三一模) 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点，若 F 是线段 AB 的中点，则 $|AB| =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】由题可知：线段 AB 为抛物线的通径，所以 $|AB| = 4$ ，故选 D 。

例 2. (2021·陕西西安市·高三月考(文)) 已知双曲线 $S: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m+8} = 1$ 的离心率为 2，则双曲线 S 的两条渐近线的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

【答案】B

【解析】由于方程 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m+8} = 1$ 表示的曲线为双曲线，则 $m(m+8) > 0$ ，解得 $m < -8$ 或 $m > 0$ 。

$$\text{则 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1 = 3.$$

①当 $m > 0$ 时，则 $a^2 = m$ ， $b^2 = m+8$ ，则 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{m+8}{m} = 3$ ，解得 $m = 4$ ，

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ，此时，该双曲线的两条渐近线的倾斜角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ ，

则双曲线 S 的两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ；

②当 $m < -8$ 时，则 $a^2 = -(m+8)$ ， $b^2 = -m$ ，则 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{-m}{-(m+8)} = \frac{m}{m+8} = 3$ ，解得 $m = -12$ 。

所以双曲线 S 的渐近线方程为 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，此时双曲线 S 的两条渐近线的倾斜角分别为 $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{5\pi}{6}$ ，

则双曲线 S 的两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 。综上所述，双曲线 S 的两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，故选 B。

【点睛】方法点睛：求双曲线的渐近线方程的方法：

(1) 定义法：直接利用 a 、 b 求得比值，则焦点在 x 轴上时，渐近线方程为 $y = \pm\frac{b}{a}x$ ，焦点在 y 轴上时，渐近线方程为 $y = \pm\frac{a}{b}x$ ；

(2) 构造齐次式：利用已知条件结合 $a^2 = b^2 + c^2$ ，构建 $\frac{b}{a}$ 的关系式（或先构建 $\frac{c}{a}$ 的关系式），再根据焦点位置写出渐近线方程即可。

例 3. (2021·吉林吉林市·高三三模(理)) 已知 m 是 1 和 9 的等比中项，则圆锥曲线 $x^2 + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 2 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【分析】

由等比中项的性质可得 $m = \pm 3$ ，分别计算曲线的离心率。

【解析】

由 m 是 1 和 9 的等比中项, 可得 $m = \pm 3$,

当 $m = 3$ 时, 曲线方程为 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, 该曲线为焦点在 y 轴上的椭圆, 离心率 $e = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

当 $m = -3$ 时, 曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 该曲线为焦点在 x 轴上的双曲线, 离心率 $e = \sqrt{1 + 3} = 2$, 故选 B.

例 4. 已知 M 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, F 是抛物线 C 的焦点, 若 $|MF| = p$, k 是抛物线 C 的准线与 x 轴的交点, 则 $\angle MKF =$ ()

A. 45° B. 30° C. 15° D. 60°

【答案】A

【解析】因为 $|MF| = p$, 所以 $x_M = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$, 所以 $y_M = \pm p \therefore \angle MKF = 45^\circ$, 选 A.

例 5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点和上顶点分别为点 $F(c, 0) (b > c)$ 和点 A, 直线

$l: 6x - 5y - 28 = 0$ 交椭圆于 P, Q 两点, 若 F 恰好为 $\triangle APQ$ 的重心, 则椭圆的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】C

【分析】由题设 $F(c, 0), A(0, b)$, 利用 F 为 $\triangle APQ$ 的重心, 求出线段 PQ 的中点为 $B\left(\frac{3c}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, 将 B 代入

直线方程得 $9c + \frac{5b}{2} - 28 = 0$, 再利用点差法可得 $2a^2 = 5bc$, 结合 $a^2 = b^2 + c^2$, 可求出 a, b, c , 进而求出离心率.

【解析】由题设 $F(c, 0), A(0, b), P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则线段 PQ 的中点为 $B(x_0, y_0)$,

由三角形重心的性质知 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 即 $(c, -b) = 2(x_0 - c, y_0)$, 解得: $x_0 = \frac{3c}{2}, y_0 = -\frac{b}{2}$

即 $B\left(\frac{3c}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 代入直线 $l: 6x - 5y - 28 = 0$, 得 $9c + \frac{5b}{2} - 28 = 0$ ①.

又 B 为线段 PQ 的中点, 则 $x_1 + x_2 = 3c, y_1 + y_2 = -b$,

又 P, Q 为椭圆上两点, $\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$,

以上两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0$,

所以 $k_{PQ} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{3c}{-b} = \frac{6}{5}$, 化简得 $2a^2 = 5bc$ ②

由①②及 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得: $\begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$, 即离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故选 C.

【点睛】方法点睛: 本题考查求椭圆的离心率, 求解离心率在圆锥曲线的考查中是一个重点也是难点, 一般求离心率有以下几种情况: ①直接求出 a, c , 从而求出 e ; ②构造 a, c 的齐次式, 求出 e ; ③采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义来求解; ④根据圆锥曲线的统一定义求解.

三、求曲线的方程

轨迹问题的考查往往与函数、方程、向量、平面几何等知识相融合, 着重考查分析问题、解决问题的能力, 对逻辑思维能力、运算能力也有一定的要求.

例 1. (2021·安徽合肥市·高三二模(文)) 下列双曲线中, 焦点在 y 轴上, 且渐近线互相垂直的是 ()

- A. $x^2 - y^2 = -4$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ C. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ D. $x^2 - y^2 = 1$

【答案】A

【解析】设双曲线的方程为: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则其渐近线为 $y = \pm \frac{a}{b}x$,

因为渐近线互相垂直, 故 $\frac{a}{b} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ 即 $a = b$, 故双曲线的方程为 $y^2 - x^2 = a^2$, 故选 A.

例 2. 已知抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 的准线为 l , 若 l 与圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$ 相交所得弦长为 $\sqrt{3}$, 则抛物线的方程为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{4}x^2$

【解析】抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 的准线 $l: y = -\frac{1}{4a}$, 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两条渐近线分别为 $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$, 可得 $x_A = -\frac{1}{2a}$, $x_B = \frac{1}{2a}$, 则 $|AB| = \frac{1}{2a} - \left(-\frac{1}{2a}\right) = 4$, 则 $a = \frac{1}{4}$. $y = \frac{1}{4}x^2$

例 3. (2021·天津高三一模) 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 F 重合,

C 的渐近线恰为矩形 $OAFB$ 的边 OA , OB 所在直线 (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的方程是 ()

- A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

【答案】D

【分析】根据四边形 $OAFB$ 为矩形以及双曲线的渐近线关于 x 轴对称, 可得 $a = b$, 利用抛物线方程求出 $c = 4$, 再根据 $a^2 + b^2 = c^2$ 可求得 $a^2 = b^2 = 8$, 从而可得结果.

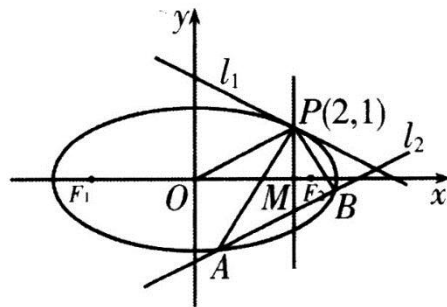
【解析】因为四边形 $OAFB$ 为矩形, 所以 $OA \perp OB$, 即双曲线的两条渐近线垂直, 根据双曲线的渐近线关于 x 轴对称, 可得 $\angle AOF = \angle BOF = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{b}{a} = 1$, 即 $a = b$, 又抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点 $F(4, 0)$, 所以双曲线

中 $c = 4$, 所以由 $a^2 + b^2 = c^2$ 可得 $2a^2 = 16$, 所以 $a^2 = b^2 = 8$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$, 故选 D.

【点睛】关键点点睛: 根据四边形 $OAFB$ 为矩形以及双曲线的渐近线关于 x 轴对称, 得到 $a = b$ 是解题关键.

例 4. (2021 山东泰安模拟) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, F_1, F_2 分别为椭圆 C 的左、右

焦点且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -1$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过 P 点的直线 l_1 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 直线 l_2 平行于 OP (O 为原点), 且与椭圆 C 交于两点 A , B , 与直线 $x = 2$ 交于点 M (M 介于 A , B 两点之间).

(i) 当 $\triangle PAB$ 面积最大时, 求 l_2 的方程;

(ii) 求证: $|PA||MB| = |PB||MA|$, 并判断 l_1, l_2 , PA, PB 的斜率是否可以按某种顺序构成等比数列.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$; (2) (i) $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{2}$; (ii) 证明见解析, 不可能构成等比数列.

【分析】(1) 设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. 求出 $\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}$ 的坐标, 根据 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -1$, 求出 c . 把点 $P(2, 1)$ 代入椭圆方程, 结合 $a^2 = b^2 + c^2$, 求出 a^2, b^2 , 即得椭圆 C 的方程;

(2) (i) 设 l_2 方程为 $y = \frac{1}{2}x + t$, $A(x_1, y_2), B(x_2, y_2)$. 把直线 l_2 的方程代入椭圆方程, 由韦达定理、弦长公式求出 $|AB|$. 由点到直线的距离公式求出点 P 到 l_2 的距离 d , 则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB|d$, 根据基本不等式求面积的最大值, 即求 l_2 的方程; (ii) 要证结论成立, 只须证明 $\frac{|PA|}{|MA|} = \frac{|PB|}{|MB|}$, 即证直线 $x = 2$ 为 $\angle APB$ 的平分线, 转化成证明 $k_{PA} + k_{PB} = 0$.

又 l_1 与 C 有一个公共点, 即 l_1 为椭圆的切线, 可求 $k_{l_1} = y'|_{x=2} = -\frac{1}{2}$, 又 $k_{l_2} = \frac{1}{2}$. 由题意 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k_{PA}, -k_{PA}$ 四个数按某种顺序成等比数列, 推出矛盾, 故不可能构成等比数列.

【解析】(1) 设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 则 $\overrightarrow{PF_1} = (-c-2, -1)$, $\overrightarrow{PF_2} = (c-2, -1)$.

$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -c^2 + 4 + 1 = -1$, $\therefore c = \sqrt{6}$. 又 $P(2, 1)$ 在椭圆上, 故 $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, 又 $a^2 = b^2 + 6$, 解得 $a^2 = 8$,

$b^2 = 2$, 故所求方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) (i) 由于 $k_{OP} = \frac{1}{2}$, 设 l_2 方程为 $y = \frac{1}{2}x + t$, $A(x_1, y_2), B(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + t \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 整理得 } x^2 + 2tx + 2t^2 - 4 = 0, \therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = -2t \\ x_1x_2 = 2t^2 - 4 \\ \Delta = -4(t^2 - 4) > 0 \Rightarrow t^2 < 4 \end{cases},$$

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{4t^2 - 4(2t^2 - 4)} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{16 - 4t^2} = \sqrt{5} \sqrt{4 - t^2}.$$

$$\text{又点 } P \text{ 到 } l_2 \text{ 的距离 } d = \frac{|t|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2|t|}{\sqrt{5}}, \therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \sqrt{4 - t^2} \times \frac{2|t|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(4 - t^2)t^2} \leq \frac{t^2 + (4 - t^2)}{2} = 2.$$

当且仅当 $4 - t^2 = t^2$, $2t^2 = 4$, 即 $t^2 = 2$ 时, 等号成立, 故直线 AB 的方程为: $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{2}$.

(ii) 要证结论成立, 只须证明: $\frac{|PA|}{|MA|} = \frac{|PB|}{|MB|}$, 由角平分线性质的性质即证: 直线 $x = 2$ 为 $\angle APB$ 的平分线,

转化成证明: $k_{PA} + k_{PB} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } k_{PA} + k_{PB} &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}x_1 + t\right) - 1\right](x_2 - 2) + \left[\left(\frac{1}{2}x_2 + t\right) - 1\right](x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + (t-2)(x_1 + x_2) - 4(t-1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{2t^2 - 4 - 2t(t-2) - 4(t-1)}{(x_2 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{-4 + 4t - 4t + 4}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = 0, \end{aligned}$$

因此结论成立.

又 l_1 与 C 有一个公共点, 即 l_1 为椭圆的切线, 由 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 得 $y^2 = 2 - \frac{1}{4}x^2$,

$$\text{令 } x > 0, y > 0, \text{ 则 } y = \sqrt{2 - \frac{1}{4}x^2}, y' = \frac{-\frac{1}{2}x}{2\sqrt{2 - \frac{1}{4}x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{32 - 4x^2}}, \text{ 所以 } y'|_{x=2} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } k_{l_1} = -\frac{1}{2},$$

故所研究的 4 条直线的斜率分别为 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k_{PA}, -k_{PA}$,

若这四个数成等比数列, 且其公比记为 q , 则应有 $q = -1$ 或 $q^2 = -1$, 或 $q^3 = -1$.

因为 $q^2 = -1$ 不成立, 所以 $q = -1$, 而当 $q = -1$ 时, $k_{PA} = \frac{1}{2}, k_{PB} = -\frac{1}{2}$, 此时直线 PB 与 l_1 重合, 不合题意,

故 l_1, l_2, PA, PB 的斜率无论如何排序都不可能构成等比数列.

【点睛】本题考查椭圆的方程, 考查弦长公式、点到直线的距离公式、基本不等式和等比数列等知识, 考查学生的逻辑推理能力和运算能力, 综合性强, 属于难题.

四、直线与圆锥曲线之间的关系

在高考中, 直线与圆锥曲线的位置关系是热点, 通常围绕弦长、面积、定点(定值), 范围问题来展开, 其中设而不求的思想是处理相交问题的最基本方法, 试题难度较大.

例 1. (2021·四川成都市·高三二模(文)) 已知 F 为抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点, A 为抛物线上的动点, 点

$B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. 则当 $\frac{|AB|}{|AF|}$ 取最大值时, $|AB|$ 的值为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

【答案】C

【分析】设 $A\left(\frac{a^2}{2}, a\right)$, 得到 $|AF| = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}$ 和 $|AB| = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{4}}$, 结合基本不等式, 求得当 $a^2 = 1$ 时, $\frac{|AB|}{|AF|}$

取得最大值，进而求得 $|AB|$ 的值.

【解析】由题意，抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点坐标为 $F(\frac{1}{2}, 0)$ ，准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$ ，

设 $A(\frac{a^2}{2}, a)$ ，因为 A 为抛物线上的一点，可得 $|AF| = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}$ ，

又因为 $B(-\frac{1}{2}, 0)$ ，则 $|AB| = \sqrt{(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2})^2 + a^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{4}}$ ，

所以 $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{\sqrt{a^4 + 6a^2 + 1}}{a^2 + 1} = \sqrt{\frac{a^4 + 6a^2 + 1}{(a^2 + 1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{4a^2}{(a^2 + 1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2}}$ ，

由基本不等式 $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \times \frac{1}{a^2}} = 2$ ，当且仅当 $a^2 = \frac{1}{a^2}$ 时，即 $a^2 = 1$ 时等号成立，

此时 $\frac{|AB|}{|AF|}$ 取最大值，所以 $|AB| = \sqrt{\frac{1}{4} \times 1^2 + \frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$ ，故选 C.

例 2. (2021·东北三省市四联考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 有公共的左、右

焦点，分别为 F_1, F_2 . 以线段 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 及其渐近线在第一象限内分别交于 M, N 两点，且

线段 NF_1 的中点在另外一条渐近线上，则 $\triangle OMF_2$ 的面积为 ()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】B

【分析】首先求出点 F_1, F_2 的坐标以及以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程，联立圆和 $y = \frac{b}{a}x$ 可得点 N 的坐标，

即可得出线段 NF_1 的中点的坐标，代入 $y = -\frac{b}{a}x$ 可得 a, b 之间的关系，结合 $c^2 = a^2 + b^2$ 即可求出双曲线的方程，再与圆的方程联立可得点 M 的坐标，利用三角形面积公式即可求解.

【解析】由题意可得： $c^2 = 25 - 9 = 16$ ，所以 $c = 4$ ， $F_1(-4, 0)$ ， $F_2(4, 0)$ ，

以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程为： $x^2 + y^2 = 16$ ，

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为： $y = \frac{b}{a}x$ 、 $y = -\frac{b}{a}x$ ，

$$\text{由} \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \quad \text{可得: } x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = 16, \text{ 即 } x^2 = \frac{16a^2}{a^2 + b^2},$$

$$\text{因为点 } N \text{ 在第一象限, 所以 } x_N = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ 所以 } y_N = \frac{b}{a}x_N = \frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{所以 } N\left(\frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{4b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \text{ 所以 } NF_1 \text{ 的中点为 } \left(\frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 2, \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

$$\text{因为点 } \left(\frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 2, \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \text{ 在渐近线 } y = -\frac{b}{a}x \text{ 上, 所以 } \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{b}{a}\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 2\right), \text{ 即}$$

$$2a = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ 所以 } b^2 = 3a^2, \text{ 因为 } c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 3a^2 = 16, \text{ 解得: } a^2 = 4, b^2 = 12, \text{ 所以双曲线}$$

$$C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \text{ 由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \text{ 可得 } 4x^2 = 28, \text{ 解得: } x = \pm\sqrt{7}, y = \pm 3,$$

$$\text{因为点 } M \text{ 在第一象限, 所以 } M(\sqrt{7}, 3), \text{ 所以 } \triangle OMF_2 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}|OF_2| \times y_M = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6, \text{ 故选 B.}$$

【关键点点睛】本题解题的关键点是求出 NF_1 的中点的坐标, 代入 $y = -\frac{b}{a}x$ 结合 $c = 4$ 解出双曲线方程, 求出点 M 的坐标.

例 3. (2021·湖南衡阳市·高三一模) 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$), 过其准线上的点 $T(1, -1)$ 作 C 的两条切线, 切点分别为 A 、 B , 下列说法错误的是 ()

A. $p = 1$

B. $TA \perp TB$

C. 直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$

D. 线段 AB 中点的横坐标为 1

【答案】A

【分析】选项 A: 由点 $T(1, -1)$ 在准线上, 可求出 p , 从而可判断; 选项 B: 设直线 $y + 1 = k(x - 1)$ 与抛物线方程联立, 由韦达定理可判断; 选项 C: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 分别求出 TA , TB 方程, 根据方程结构可判断; 选项 D: 由点差法可判断.

【解析】易知准线方程为 $y = -1$, $\therefore p = 2$, $C: x^2 = 4y$, 故选项 A 不正确.

设直线 $y + 1 = k(x - 1)$, 代入 $y = \frac{x^2}{4}$, 得 $\frac{x^2}{4} - kx + k + 1 = 0$, 当直线与 C 相切时, 有 $\Delta = 0$, 即 $k^2 - k - 1 = 0$,

设 TA , TB 斜率分别为 k_1, k_2 , 易知 k_1, k_2 是上述方程两根, 故 $k_1 k_2 = -1$,

故 $TA \perp TB$. 故选项 B 正确.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 其中 $y_1 = \frac{x_1^2}{4}, y_2 = \frac{x_2^2}{4}$. 则 $TA: y - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{2}x - y_1$.

代入点 $(1, -1)$, 得 $x_1 - 2y_1 + 2 = 0$, 同理可得 $x_2 - 2y_2 + 2 = 0$,

故 $AB: x - 2y + 2 = 0$, 故 $k_{AB} = \frac{1}{2}$. 故选项 C 正确.

由 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{4} = \frac{1}{2}$, 得 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$, 即 AB 中点横坐标为 1. 故选项 D 正确, 故选 A.

【点睛】关键点睛: 本题考查抛物线的切线问题, 解答本题的关键是设直线 $y + 1 = k(x - 1)$ 与抛物线方程联立, 利用韦达定理得出斜率关系, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 得 $x_1 - 2y_1 + 2 = 0$, 同理可得 $x_2 - 2y_2 + 2 = 0$, 属于中档题.

例 4. (2021·青海海东市·高三一模(理)) 抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 且垂直于 y 轴的直线交抛物线 C 于 M, N 两点, O 为原点, $\triangle OMN$ 的面积为 2.

(1) 求抛物线 C 的方程.

(2) P 为直线 $l: y = y_0 (y_0 < 0)$ 上一个动点, 过点 P 作抛物线的切线, 切点分别为 A, B , 过点 P 作 AB 的垂线, 垂足为 H , 是否存在实数 y_0 , 使点 P 在直线 l 上移动时, 垂足 H 恒为定点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求出 y_0 的值, 并求定点 H 的坐标.

【答案】(1) $x^2 = 4y$; (2) 存在这样的 y_0 , 当 $y_0 = -1$ 时, H 坐标为 $(0, 1)$.

【分析】(1) 先根据抛物线的性质, 结合题中条件, 得到 $|MN| = 2p$, 由三角形面积列出方程求出 p , 即可得出抛物线方程; (2) 先设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$, 直线 AP 的方程为 $y - y_1 = k(x - x_1)$, 根据直线与抛物线相切, 得到 $y + y_1 = \frac{x_1 x}{2}$, 进而推出 AB 的方程为 $y + y_0 = \frac{x_0 x}{2}$, 根据 $PH \perp AB$, 得到 PH 方程, 由两直线方程, 即可求出 y_0 , 确定出结果.

【解析】(1) 由题意得, 点 M, N 的纵坐标均为 $\frac{p}{2}$, 由 $x^2 = 2p \cdot \frac{p}{2}$, 解得 $x = \pm p$, 则 $|MN| = 2p$,

由 $S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |OF| = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{2} p^2 = 2$ ，解得 $p = 2$ ，故抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 。

(2) 假设存在实数 y_0 ，使点 P 在直线 l 上移动时，垂足 H 恒为定点，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$ ，直线 AP 的方程为 $y - y_1 = k(x - x_1)$ ，将抛物线方程变形为 $y = \frac{x^2}{4}$ ，则

$y' = \frac{x}{2}$ ，所以 $k = \frac{x_1}{2}$ ，所以 AP 的方程为 $y - y_1 = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$ 。

因为 $x_1^2 = 4y_1$ ，所以直线 AP 的方程为 $y + y_1 = \frac{x_1 x}{2}$ ，把 $P(x_0, y_0)$ 代入 AP 的方程得 $y_0 + y_1 = \frac{x_1 x_0}{2}$ ，同理可得

$y_0 + y_2 = \frac{x_2 x_0}{2}$ 。

构造直线方程为 $y + y_0 = \frac{x_0 x}{2}$ ，易知 A, B 两点均在该直线上，所以直线 AB 的方程为 $y + y_0 = \frac{x_0 x}{2}$ 。

故 AB 恒过点 $(0, -y_0)$ 。因为 $PH \perp AB$ ，所以可设 PH 方程为 $x - x_0 = -\frac{x_0}{2}(y - y_0)$ ，化简得

$x = -\frac{x_0}{2}(y - y_0 - 2)$ ，所以 PH 恒过点 $(0, y_0 + 2)$ 。

当 $-y_0 = y_0 + 2$ ，即 $y_0 = -1$ 时， AB 与 PH 均恒过 $(0, 1)$ ，故存在这样的 y_0 ，当 $y_0 = -1$ 时， H 坐标为 $(0, 1)$ 。

【点睛】关键点点睛：求解本题第二问的关键在于用 y_0 分别表示出直线 AB 和 PH 的方程；根据题中条件，先设点的坐标，以及直线 AP 的方程，由直线与抛物线相切，得出直线 AP 方程，推出 AB 的方程，进而确定 PH 的方程，即可求解。

例 5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，点 P 为椭圆 C 上异于 A_1, A_2 的一点，

且直线 PA_1, PA_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 直线 l 过右焦点 F_2 与椭圆 C 交于 M, N 两点 (M, N 与 A_1 不重合)， l 不与 x 轴垂直，若

$k_{A_1 M} + k_{A_1 N} = -k_{MN}$ ，求 $|MN|$ 。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ；(2) $\frac{24}{7}$ 。

【分析】(1) 设出 P 点的坐标，根据 P 点在椭圆上以及 PA_1, PA_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$ ，列出方程，即可求得椭圆 C 的标准方程；(2) 设出直线 l 的方程以及 M, N 点的坐标，与椭圆方程联立，消去 x ，利用韦达定理得

出 $y_1 + y_2$ 与 $y_1 y_2$ 的值, 再根据 $k_{A_1 M} + k_{A_1 N} = -k_{MN}$ 列出方程, 即可解出直线的斜率, 从而利用弦长公式求得 $|MN|$.

【解析】(1) 设 $P(x_0, y_0)$, 由题意知: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$,

$$\because k_{PA_1} \cdot k_{PA_2} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{3\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)}{x_0^2 - a^2} = -\frac{3}{a^2}, \therefore -\frac{3}{a^2} = -\frac{3}{4}, \text{解得: } a^2 = 4,$$

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 根据题意, 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 $MN: x = my + 1 (m \neq 0)$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my + 1, \end{cases}$

消去 x 并整理得: $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$, 则 $\Delta = 36m^2 + 36(3m^2 + 4) > 0$,

即 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$,

$$\begin{aligned} \because k_{A_1 M} &= \frac{y_1}{x_1 + 2}, \quad k_{A_1 N} = \frac{y_2}{x_2 + 2}, \therefore k_{A_1 M} + k_{A_1 N} = \frac{y_1(x_2 + 2) + y_2(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{y_1(my_2 + 3) + y_2(my_1 + 3)}{(my_2 + 3)(my_1 + 3)} \\ &= \frac{2my_1 y_2 + 3(y_1 + y_2)}{m^2 y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9} = \frac{2m \times \left(-\frac{9}{3m^2 + 4}\right) + 3 \times \left(-\frac{6m}{3m^2 + 4}\right)}{m^2 \times \left(-\frac{9}{3m^2 + 4}\right) + 3m \times \left(-\frac{6m}{3m^2 + 4}\right) + 9} = \frac{-36m}{36} = -m, \end{aligned}$$

又 $\because k_{MN} = \frac{1}{m}$, 由 $k_{A_1 M} + k_{A_1 N} = -k_{MN}$, 得: $\frac{1}{m} - m = 0$, 解得: $m^2 = 1$, $\therefore |y_1 + y_2| = \frac{6}{7}$, $y_1 y_2 = -\frac{9}{7}$,

故 $|MN| = \sqrt{1 + m^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{24}{7}$.

【点睛】方法点睛: (1) 解答直线与椭圆的题目时, 时常把两个曲线的方程联立, 消去 x (或 y) 建立一元二次方程, 然后借助根与系数的关系, 并结合题设条件建立有关参变量的等量关系; (2) 涉及到直线方程的设法时, 务必考虑全面, 不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形.

【反思提升】圆锥曲线问题，往往利用 a, b, c, e, p 的关系或曲线的定义，确定圆锥曲线方程是基础，通过联立直线方程与圆锥曲线方程的方程组，应用一元二次方程根与系数的关系，得到“目标函数”的解析式，应用确定函数最值的方法---如二次函数的性质、基本不等式、导数等求解. 本题“出奇”之处在于有较浓的“几何味”，研究几何图形的面积等. 这类题目能较好的考查考生的逻辑思维能力、运算求解能力、分析问题解决问题的能力、数学的应用意识等. 因此，在复习中，一要熟练掌握椭圆、双曲线、抛物线的基础知识、基本方法，在抓住通性通法的同时，要训练利用代数方法解决几何问题的运算技巧. 二要熟悉圆锥曲线的几何性质，重点掌握直线与圆锥曲线相关问题的基本求解方法与策略，提高运用函数与方程思想，向量与导数的方法来解决问题的能力. 最后要注意运算能力的培养.

专题二十六 圆锥曲线的“三定”与探索性问题

纵观近几年高考圆锥曲线的综合问题是高考中的一个热点和重点，在历年高考中出现的频率较高，主要注重考查学生的逻辑思维能力，运算能力，分析问题和解决问题的能力. 其中直线与椭圆、抛物线的位置关系常常与平面向量、三角函数、函数的性质、不等式等知识交汇命题. 涉及求轨迹、与圆相结合、定点、定值、最值、参数范围、存在性问题等. 本文就高中阶段出现这类问题加以类型的总结和方法的探讨.

一、定点问题

求解直线或圆锥曲线过定点问题的基本思路是：把直线或圆锥曲线方程中的变量 x, y 看成常数，把方程的一端化为零，将方程转化为以参数为主变量的方程，这个方程对任意参数都成立，这时参数的系数就要全部等于零，这样就得到一个关于 x, y 的方程组，这个方程组的解所确定的点就是直线或圆锥曲线所过的定点.

例 1. 已知 O 为坐标原点，过点 $P(a, -1)$ 作两条直线分别与抛物线 $C: x^2 = 4y$ 相切于点 A, B ， AB 的中点为 M ，则下列结论错误的是 ()

- A. 直线 AB 过定点 $(0, 2)$;
- B. PM 的斜率不存在;
- C. y 轴上存在一点 N ，使得直线 NA 与直线 NB 关于 y 轴对称;
- D. A, B 两点到抛物线准线的距离的倒数和为定值.

【答案】A

【分析】根据导数求出切线斜率，得出切线方程，进而可得直线 AB 方程，即可求出直线 AB 定点判断 A；联立

直线 AB 方程和抛物线求出点 M 的横坐标可判断 **B**；设 $N(0, b)$ ，可得 $k_1 + k_2 = \frac{2a(-b-1)}{-4}$ ，当 $b = -1$ 时满足

条件，可判断 **C**；可求出 $\frac{1}{y_1+1} + \frac{1}{y_2+1} = 1$ ，即可判断 **D**。

【解析】设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $\because y = \frac{1}{4}x^2$ ， $\therefore y' = \frac{1}{2}x$ ， $\therefore$ 过点 A 的切线方程为 $y - y_1 = \frac{1}{2}x_1(x - x_1)$ ，即 $y - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{2}x_1^2$ ， $\therefore y = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2$ ，同理过点 B 的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x_2x - \frac{1}{4}x_2^2$ ，

将 $(a, -1)$ 分别代入上式，得 $-1 = \frac{a}{2}x_1 - y_1$ ， $-1 = \frac{a}{2}x_2 - y_2$ ，

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $\frac{a}{2}x - y + 1 = 0$ ， $\therefore$ 直线 AB 过定点 $(0, 1)$ ，故 **A** 选项错误，符合题意；

联立方程 $\begin{cases} x^2 = 4y \\ \frac{a}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$ 得： $x^2 - 2ax - 4 = 0$ ， $\Delta = 4a^2 + 16 > 0$ ，则 $x_1 + x_2 = 2a$ ， $x_1 \cdot x_2 = -4$ ，

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = a$ ， $\therefore PM \perp x$ 轴，故 **B** 选项正确，不符合题意；

设 $N(0, b)$ ，由题意得 $x_1 \neq 0$ ， $x_2 \neq 0$ ，设直线 NA 、 NB 的斜率分别为 k_1 、 k_2 ，

则 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - b}{x_1} + \frac{y_2 - b}{x_2} = \frac{(\frac{1}{4}x_1 \cdot x_2 - b)(x_1 + x_2)}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2a(-b-1)}{-4}$ ，

当 $b = -1$ 时， $k_1 + k_2 = 0$ ，即直线 NA 与直线 NB 关于 y 轴对称，**C** 选项正确，不符合题意；

$\therefore$ 点 A 到准线的距离为 $y_1 + 1$ ，点 B 到准线的距离为 $y_2 + 1$ ，

$\therefore \frac{1}{y_1+1} + \frac{1}{y_2+1} = \frac{y_1+y_2+2}{(y_1+1)(y_2+1)} = \frac{y_1+y_2+2}{y_1 \cdot y_2 + y_1 + y_2 + 1} = \frac{y_1+y_2+2}{\frac{(x_1 \cdot x_2)^2}{16} + y_1 + y_2 + 1} = 1$ ，**D** 选项正确，不符合题

意，故选 **A**。

【点睛】思路点睛：直线与抛物线的综合问题的求解策略：

(1) 有关直线与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 相交所得的弦长问题，要注意直线是否过抛物线的焦点，若过抛物线的焦点且与抛物线交于 A 、 B 两点，则可直接使用公式 $|AB| = x_A + x_B + p$ 求解；若不过焦点，则用一般的弦长公式求解；

(2) 涉及中点、距离等问题时，一般要利用根与系数的关系及“设而不求，整体代入”思想求解。

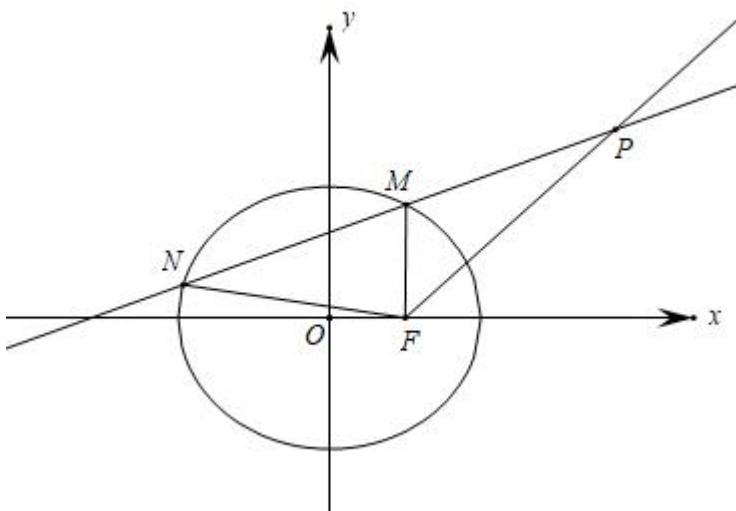
例 2. (2021 四川南充市·高三月考(文)) 设 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, 不垂直于 x 轴且不过点 F 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 在 $\triangle MFN$ 中, 若 $\angle MFN$ 的外角平分线与直线 MN 交于点 P , 则 P 的横坐标为_____.

【答案】4

【分析】根据椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由椭圆的第二定义得到

$|MF| = 2 - \frac{1}{2}x_1, |NF| = 2 - \frac{1}{2}x_2$, 设 $P(m, n)$, 然后根据外角平分线定理, 由 $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{|MP|}{|NP|}$ 求解.

【解析】解法一: 如图所示:



因为椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 所以 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$, 所以椭圆的右焦点是 $F(1, 0)$, 所以离心率为

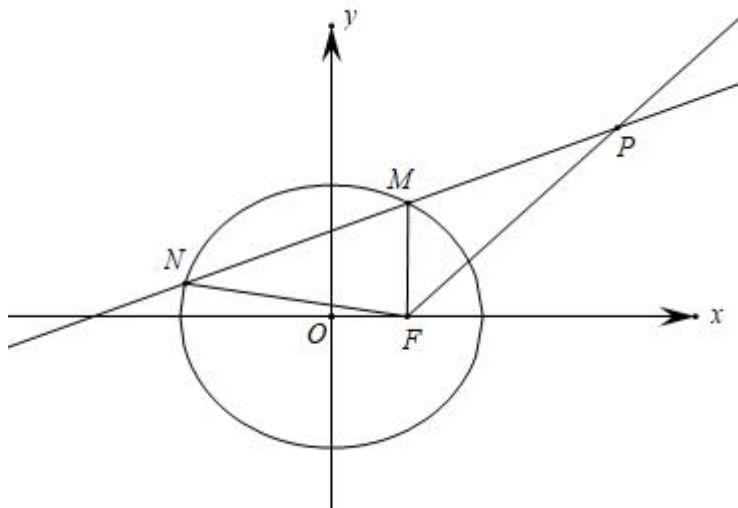
$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 且 } y^2 = 3 - \frac{3x^2}{4}$$

$$\text{所以 } \frac{|MF|}{|NF|} = \frac{\sqrt{(x_1-1)^2 + y_1^2}}{\sqrt{(x_2-1)^2 + y_2^2}} = \frac{\sqrt{(x_1-1)^2 + 3 - \frac{3}{4}x_1^2}}{\sqrt{(x_2-1)^2 + 3 - \frac{3}{4}x_2^2}} = \frac{2 - \frac{1}{2}x_1}{2 - \frac{1}{2}x_2},$$

设 $P(m, n)$, 由外角平分线定理得 $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{|MP|}{|NP|}$, 即 $\frac{x_1 - m}{x_2 - m} = \frac{2 - \frac{1}{2}x_1}{2 - \frac{1}{2}x_2}$, 化简得 $2(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}m(x_1 - x_2)$,

解得 $m=4$ ，所以 P 的横坐标为 4.

【解析】解二：如图所示：



因为椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，所以 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$ ，所以椭圆的右焦点是 $F(1,0)$ ，所以离心率为

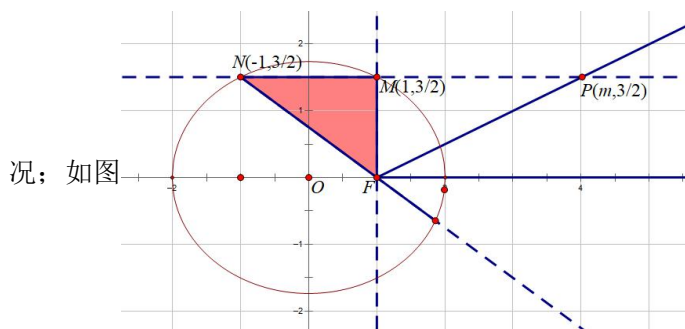
$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 由椭圆的第二定义得: } e = \frac{|MF|}{\left|x_1 - \frac{a^2}{c}\right|} = \frac{|NF|}{\left|x_2 - \frac{a^2}{c}\right|},$$

$$\text{所以 } |MF| = 2 - \frac{1}{2}x_1, |NF| = 2 - \frac{1}{2}x_2,$$

$$\text{设 } P(m, n), \text{ 由外角平分线定理得 } \frac{|MF|}{|NF|} = \frac{|MP|}{|NP|}, \text{ 即 } \frac{x_1 - m}{x_2 - m} = \frac{2 - \frac{1}{2}x_1}{2 - \frac{1}{2}x_2}, \text{ 化简得 } 2(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}m(x_1 - x_2),$$

解得 $m=4$ ，所以 P 的横坐标为 4.

解法三：由题干给出信息直线是变化的而求 P 点横坐标的值显然这个值是一个定值，我们不妨取一个特殊情况



况：如图 则由由外角平分线定理得 $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{|MP|}{|NP|}$ 得

$$\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{4-(\frac{3}{2})^2}} = \frac{m-1}{m+1} \text{ 解得 } m=4, \text{ 所以 } P \text{ 的横坐标为 } 4.$$

例 3. (2021 江西吉安模拟) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知斜率存在的直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 点 $Q(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0)$ 总满足 $\angle AQQ = \angle BQQ$, 证明: 直线 l 过定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 由离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $a^2 = 4b^2$, 再根据椭圆过点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 可得 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$, 联立可得答案.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 将直线方程与椭圆方程联立, 写出韦达定理, 又因为 $\angle AQQ = \angle BQQ$, 所以 $k_{AQ} + k_{BQ} = 0$, 将韦达定理代入得出答案.

【解析】(1) 因为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, 即 $a^2 = 4b^2$,

又椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 代入椭圆方程可得 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$,

联立方程组可得 $\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \\ a^2 = 4b^2 \end{cases}$, 解得 $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$ 消去 y 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$, $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0$, 即

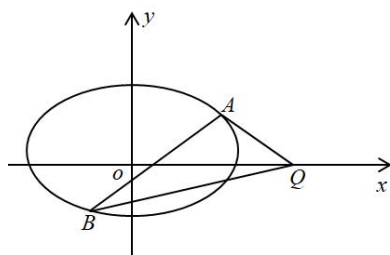
$$m^2 < 4k^2 + 1, \quad x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

因为 $\angle AQO = \angle BQO$ ，所以 $k_{AQ} + k_{BQ} = 0$ ， $k_{AQ} + k_{BQ} = \frac{y_1}{x_1 - 4\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{y_2}{x_2 - 4\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{kx_1 + m}{x_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}} + \frac{kx_2 + m}{x_2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}} = 0$ ，

即 $(kx_1 + m)\left(x_2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + (kx_2 + m)\left(x_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 2kx_1x_2 + \left(m - \frac{4\sqrt{3}}{3}k\right)(x_1 + x_2) - \frac{8\sqrt{3}}{3}m = 0$ ，

得 $2k(4m^2 - 4) - 8km\left(m - \frac{4\sqrt{3}}{3}k\right) - \frac{8\sqrt{3}}{3}m(1 + 4k^2) = 0$ ，化简得 $m = -\sqrt{3}k$ ，直线 l 的方程为 $y = k(x - \sqrt{3})$ ，

所以，直线 l 恒过定点 $(\sqrt{3}, 0)$ 。



【点睛】关键点睛：本题考查求椭圆方程和直线过定点问题，解答本题的关键是由 $\angle AQO = \angle BQO$ ，所以

$k_{AQ} + k_{BQ} = 0$ ，即 $2kx_1x_2 + \left(m - \frac{4\sqrt{3}}{3}k\right)(x_1 + x_2) - \frac{8\sqrt{3}}{3}m = 0$ ，将韦达定理代入，属于中档题。

例 4. 已知抛物线 C 的顶点在原点，焦点在坐标轴上，点 $A(1, 2)$ 为抛物线 C 上一点。

(1) 求抛物线 C 的方程。

(2) 若点 $B(1, -2)$ 在抛物线 C 上，过点 B 作抛物线 C 的两条弦 BP 与 BQ ，若 $k_{BP} \cdot k_{BQ} = -2$ ，

求证：直线 PQ 过定点。

【解析】(1) 若抛物线的焦点在 x 轴上，设抛物线方程为 $y^2 = ax$ ，代入点 $A(1, 2)$ ，

可得 $a = 4$ ，所以抛物线方程为 $y^2 = 4x$ 。

若抛物线的焦点在 y 轴上，设抛物线方程为 $x^2 = my$ ，代入点 $A(1, 2)$ ，

可得 $m = \frac{1}{2}$ ，所以抛物线方程为 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 。

综上所述，抛物线 C 的方程是 $y^2 = 4x$ 或 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 。

(2) 证明：因为点 $B(1, -2)$ 在抛物线 C 上，所以由(1)可得抛物线 C 的方程是 $y^2 = 4x$ 。

易知直线 BP ， BQ 的斜率均存在，设直线 BP 的方程为 $y + 2 = k(x - 1)$ ，将直线 BP 的方程代入

$y^2 = 4x$ ，消去 y ，得 $k^2x^2 - (2k^2 + 4k + 4)x + (k + 2)^2 = 0$ 。设 $P(x_1, y_1)$ ，则 $x_1 = \frac{(k + 2)^2}{k^2}$ ，

所以 $P\left(\frac{(k+2)^2}{k^2}, \frac{2k+4}{k}\right)$. 用 $-\frac{2}{k}$ 替换点 P 坐标中的 k , 可得 $Q((k-1)^2, 2-2k)$, 从而直线 PQ 的斜率为

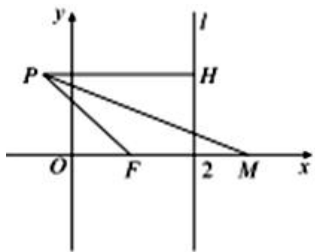
$$\frac{\frac{2k+4}{k} - 2 + 2k}{\frac{(k+2)^2}{k^2} - (k-1)^2} = \frac{2k^3 + 4k}{-k^4 + 2k^3 + 4k + 4} = \frac{2k}{-k^2 + 2k + 2}, \text{ 故直线 } PQ \text{ 的方程是 } y - 2 + 2k = \frac{2k}{-k^2 + 2k + 2}[x - (k-1)^2].$$

在上述方程中, 令 $x=3$, 解得 $y=2$, 所以直线 PQ 恒过定点 $(3, 2)$.

例 5. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $F(1, 0)$, 过直线 $l: x=2$ 左侧的动点 P 作 $PH \perp l$ 于点 H , $\angle HPF$ 的角平分线交 x 轴于点 M , 且 $|PH| = \sqrt{2}|MF|$, 记动点 P 的轨迹为曲线 Γ .

(1) 求曲线 Γ 的方程;

(2) 过点 F 作直线 m 交曲线 Γ 于 A, B 两点, 点 C 在 l 上, 且 $BC \parallel x$ 轴, 试问: 直线 AC 是否恒过定点? 请说明理由.



【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$; (2) 答案见解析.

【解析】(1) 设 $P(x, y)$, 由题可知 $|MF| = |PF|$, 所以 $\frac{|PF|}{|PH|} = \frac{|MF|}{|PH|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{|x-2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

化简整理得 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 即曲线 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 由已知可得直线 m 的斜率不为 0, $\therefore$ 可设直线 m 的方程为 $x = ny + 1$,

联立方程组 $\begin{cases} x = ny + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 x 得 $(n^2 + 2)y^2 + 2ny - 1 = 0$, $\Delta > 0$ 恒成立,

记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $C(2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2n}{n^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{n^2 + 2}, x_1 = ny_1 + 1$,

$\therefore$ 直线 AC 的斜率为 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - 2}$, 直线 AC 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - 2}(x - 2)$,

即 $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - 2} \left[x - 2 + \frac{y_2(x_1 - 2)}{y_1 - y_2} \right]$, 又 $\frac{y_2(x_1 - 2)}{y_1 - y_2} = \frac{y_2(ny_1 - 1)}{-\frac{2n}{n^2 + 2} - 2y_2} = \frac{y_2 + \frac{n}{n^2 + 2}}{2(\frac{n}{n^2 + 2} + y_2)} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线 AC 的方程为 $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - 2} (x - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - 2} (x - \frac{3}{2})$, $\therefore$ 直线 AC 过定点 $N(\frac{3}{2}, 0)$.

二、定值问题

定值是证明求解的一个量与参数无关, 解这类试题时要会合理选择参数(参数可能是直线的斜率、截距, 也可能是动点的坐标等), 使用参数表达其中变化的量, 再使用这些变化的量表达需要求解的解题目标. 当使用直线的斜率和截距表达直线方程时, 在解题过程中要注意建立斜率和截距之间的关系, 把双参数问题化为单参数问题解决.

例 1. (2021 湖北大课改联考) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右顶点分别为 A, B , 过 x 轴上点 $M(-4, 0)$ 作一直线 PQ 与椭圆交于 P, Q 两点 (异于 A, B), 若直线 AP 和 BQ 的交点为 N , 记直线 MN 和 AP 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 : k_2 =$ ()

A. $\frac{1}{3}$

B. 3

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

【答案】A

【分析】首先利用三点共线表示点 N 的横坐标, 并利用方程联立, 得出 P, Q 两点坐标关系, 代入 $\frac{k_1}{k_2}$, 即可求值.

【解析】设 $N(x, y)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 设直线 PQ 的方程: $x = my - 4$,

$$\text{由 } P, N, A \text{ 和 } Q, N, B \text{ 三点共线可知 } \begin{cases} \frac{y_1}{x_1 + 2} = \frac{y}{x + 2} \\ \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y}{x - 2} \end{cases},$$

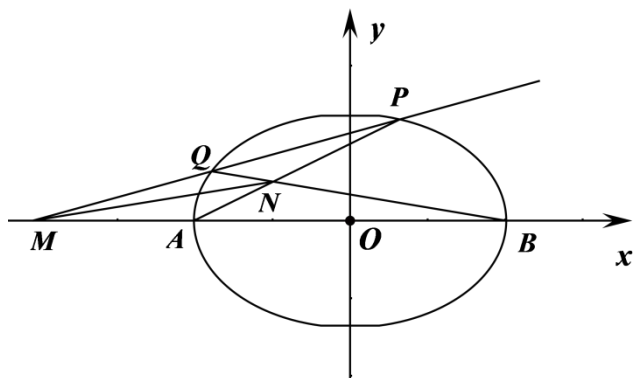
$$\text{解得: } x = \frac{2y_1(x_2 - 2) + 2y_2(x_1 + 2)}{-y_1(x_2 - 2) + y_2(x_1 + 2)} = \frac{2y_1(my_2 - 6) + 2y_2(my_1 - 2)}{-y_1(my_2 - 6) + y_2(my_1 - 2)},$$

$$\therefore x = \frac{2my_1y_2 - 6y_1 - 2y_2}{3y_1 - y_2}, \quad x + 4 = \frac{2my_1y_2 + 6y_1 - 6y_2}{3y_1 - y_2}, \quad (*)$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my - 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 - 8my + 12 = 0, \quad \Delta = 64m^2 - 48(m^2 + 2) = 16(m^2 - 6) > 0, m^2 > 6,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{8m}{m^2 + 2}, y_1y_2 = \frac{12}{m^2 + 2}, \therefore my_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

代入(*)得 $x+4 = \frac{9y_1-3y_2}{3y_1-y_2} = 3$, $\therefore k_1 = \frac{y}{x+4}$, $k_2 = \frac{y}{x+2}$, $\therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{x+2}{x+4} = 1 - \frac{2}{x+4} = \frac{1}{3}$, 故选 A.



【思路点睛】本题的思路利用韦达定理设而不求，巧妙运用 $y_1 + y_2$ 与 $y_1 y_2$ 关系化简，从而达到求值目的.

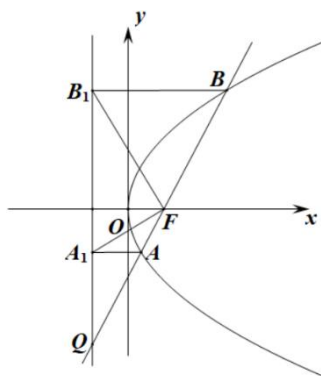
例 2. (2021·河北张家口市·高三期末) 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 l 过点 F , 斜率 $k > 0$, 且交抛物线 C 于 A, B (点 A 在 x 轴的下方) 两点, 抛物线的准线为 m , $AA_1 \perp m$ 于 A_1 , $BB_1 \perp m$ 于 B_1 , 下列结论错误的是 ()

- A. 若 $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{FA}$, 则 $k = \sqrt{3}$ B. $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = 1$
- C. 若 $k = 1$, 则 $|AB| = 12$ D. $\angle A_1FB_1 = 90^\circ$

【答案】C

【分析】对 A, 延长 BA , 交准线 m 于 Q , 根据相似得出 $\angle A_1AQ = 60^\circ$ 即可求解; 对 B, 联立直线与抛物线, 利用韦达定理即可求解; 对 C, 将 B 中 k 换为 1, 利用弦长公式即可求出; 对 D, 利用 $\angle BB_1F = \angle B_1FB$, $\angle AA_1F = \angle A_1FA$ 可得.

【解析】延长 BA , 交准线 m 于 Q .



设 $|FA| = |AA_1| = t$, $|FB| = |BB_1| = 3t$, $|AQ| = x$,

则 $\triangle QAA_1 \sim \triangle QBB_1 \Rightarrow \frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|AA_1|}{|BB_1|} \Rightarrow \frac{x}{x+4t} = \frac{t}{3t} \Rightarrow x = 2t$, 故 $\angle A_1AQ = 60^\circ$, 故 $k_{AB} = \sqrt{3}$, A 正确;

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立直线与抛物线 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $k^2x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}, x_1x_2 = 1$, $\therefore \frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = 1$, 故 B 正确;

若 $k = 1$, 则 $x_1 + x_2 = 6$, $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = 8$, 故 C 错误;

$\therefore \angle BB_1F = \angle B_1FB$, $\angle AA_1F = \angle A_1FA$, $\therefore \angle B_1FB + \angle A_1FA = \frac{180^\circ - \angle B_1BF}{2} + \frac{180^\circ - \angle A_1AF}{2} = 90^\circ$, 故

D 正确, 故选 C.

【点睛】本题考查抛物线焦点弦问题, 解题的关键是正确理解抛物线的定义, 利用定义得出线段关系求解.

例 3. (2021·云南师大附中高三月考(文)) 已知点 O 为坐标原点, 抛物线 $y^2 = 3x$ 与过焦点的直线交于 A, B 两点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 等于_____.

【答案】 $-\frac{27}{16}$

【分析】由题知抛物线 $y^2 = 3x$ 的焦点 $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, 进而分直线 AB 斜率存在和不存在两种情况讨论求解即可.

【解析】设 $A\left(\frac{y_1^2}{3}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{3}, y_2\right)$, 当直线 AB 斜率不存在时, $y_1 = p = \frac{3}{2}, y_2 = -p = -\frac{3}{2}$,

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(\frac{y_1^2}{3}, y_1\right) \cdot \left(\frac{y_2^2}{3}, y_2\right) = \frac{1}{9}y_1^2y_2^2 + y_1y_2 = -\frac{27}{16}$.

当直线 AB 斜率存在时, 设方程为 $x = my + \frac{3}{4} (m \neq 0)$, 与抛物线联立方程得: $y^2 - 3my - \frac{9}{4} = 0$, 所以

$$y_1 y_2 = -\frac{9}{4}, \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(\frac{y_1^2}{3}, y_1 \right) \cdot \left(\frac{y_2^2}{3}, y_2 \right) = \frac{1}{9} y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2 = -\frac{27}{16}. \text{ 故答案为: } -\frac{27}{16}.$$

【点睛】本题考查过抛物线的焦点的弦的性质, 考查运算求解能力, 分类讨论思想, 是中档题. 本题解题的关键在于根据已知条件分直线 AB 斜率存在和不存在两种情况讨论; 此外, 掌握过抛物线焦点的弦的相关性质, 能够快速解题.

例 4. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的点均在 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 9$ 外, 且对 C_1 上任意一点 M , M 到直线 $x = -2$ 的距离等于该点与圆 C_2 上点的距离的最小值.

(I) 求曲线 C_1 的方程;

(II) 设 $P(x_0, y_0)$ ($y \neq \pm 3$) 为圆 C_2 外一点, 过 P 作圆 C_2 的两条切线, 分别与曲线 C_1 相交于点 A, B 和 $C,$

D . 证明: 当 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值.

【解析】(I) 解法 1: 设 M 的坐标为 (x, y) , 由已知得 $|x+2| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - 3$,

易知圆 C_2 上的点位于直线 $x = -2$ 的右侧. 于是 $x+2 > 0$, 所以 $\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = x+5$.

化简得曲线 C_1 的方程为 $y^2 = 20x$.

解法 2: 由题设知, 曲线 C_1 上任意一点 M 到圆心 $C_2(5, 0)$ 的距离等于它到直线 $x = -5$ 的距离, 因此, 曲线 C_1 是以 $(5, 0)$ 为焦点, 直线 $x = -5$ 为准线的抛物线, 故其方程为 $y^2 = 20x$.

(II) 当点 P 在直线 $x = -4$ 上运动时, P 的坐标为 $(-4, y_0)$, 又 $y_0 \neq \pm 3$, 则过 P 且与圆 C_2 相切的直线的斜率 k 存在且不为 0, 每条切线都与抛物线有两个交点, 切线方程为

$$y - y_0 = k(x + 4), \text{ 即 } kx - y + y_0 + 4k = 0. \text{ 于是 } \frac{|5k + y_0 + 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3. \text{ 整理得 } 72k^2 + 18y_0k + y_0^2 - 9 = 0. \quad \textcircled{1}$$

设过 P 所作的两条切线 PA, PC 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 k_1, k_2 是方程①的两个实根, 故

$$k_1 + k_2 = -\frac{18y_0}{72} = -\frac{y_0}{4}. \quad \textcircled{2}, \text{ 由 } \begin{cases} k_1x - y + y_0 + 4k_1 = 0, \\ y^2 = 20x, \end{cases} \text{ 得 } k_1y^2 - 20y + 20(y_0 + 4k_1) = 0. \quad \textcircled{3}$$

设四点 A, B, C, D 的纵坐标分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 , 则 y_1, y_2 是方程③的两个实根, 所以

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{20(y_0 + 4k_1)}{k_1}. \quad \text{④, 同理可得 } y_3 \cdot y_4 = \frac{20(y_0 + 4k_2)}{k_2}. \quad \text{⑤}$$

$$\begin{aligned} \text{于是由②, ④, ⑤三式得 } y_1 y_2 y_3 y_4 &= \frac{400(y_0 + 4k_1)(y_0 + 4k_2)}{k_1 k_2} = \frac{400[y_0^2 + 4(k_1 + k_2)y_0 + 16k_1 k_2]}{k_1 k_2} \\ &= \frac{400[y_0^2 - y_0^2 + 16k_1 k_2]}{k_1 k_2} = 6400. \end{aligned}$$

所以当 P 在 $x = -4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值 6400.

例 5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{2}$, 且经过点 $(-\sqrt{2}, 1)$. 过点 $D(0, -2)$ 的斜率为 k 的直线

l 与椭圆交于 A, B 两点, 与 x 轴交于 P 点, 点 A 关于 x 轴的对称点 C , 直线 BC 交 x 轴于点 Q .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 试问: $|OP| \cdot |OQ|$ 是否为定值? 若是, 求出定值; 否则, 说明理由.

【答案】(1) $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$; (2) 答案见解析.

【解析】(1) 由已知得 $\frac{b^2}{a^2} = 1$, $c = \sqrt{2}$, $\therefore a = 2$, $b = \sqrt{2}$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

设直线 l 的方程为 $y = kx - 2$, 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 联立得 $(1 + 2k^2)x^2 - 8kx + 4 = 0$.

由 $\Delta = 64k^2 - 16(1 + 2k^2) > 0$ 得 $k^2 > \frac{1}{2}$, 所以 $k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

(2) 令 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $C(x_1, -y_1)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k}{1 + 2k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4}{1 + 2k^2}$.

由 $y = kx - 2$ 中, 令 $y = 0$ 得 $x_P = \frac{2}{k}$, 即 $P\left(\frac{2}{k}, 0\right)$.

设直线 BC 的方程为 $y = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) - y_1$, 令 $y = 0$ 得 $x_Q = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_2 + y_1}$.

将 $y_1 = kx_1 - 2$, $y_2 = kx_2 - 2$ 代入上式得:

$$x_Q = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_2 + y_1} = \frac{2kx_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)}{k(x_1 + x_2) - 4} = \frac{2k \times \frac{4}{1 + 2k^2} - \frac{16k}{1 + 2k^2}}{k \times \frac{8k}{1 + 2k^2} - 4} = 2k$$

所以 $|OP| \cdot |OQ| = |x_P| \cdot |x_Q| = \left| \frac{2}{k} \right| \cdot |2k| = 4$ ，为定值。

三、探索性问题

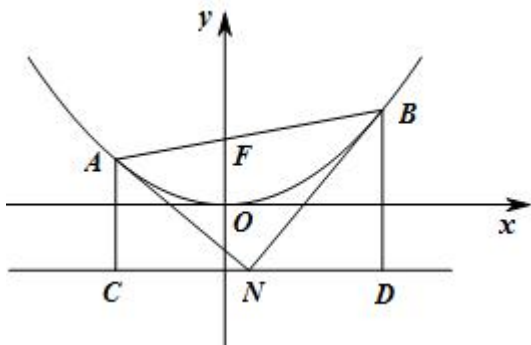
解决直线与圆锥曲线位置关系的存在性问题，往往是先假设所求的元素存在，然后再推理论证，检验说明假设是否正确。其解题步骤为：

(1) 先假设存在，引入参变量，根据题目条件列出关于参变量的方程(组)或不等式(组)。

(2) 解此方程(组)或不等式(组)，若有解则存在；若无解则不存在。

(3) 得出结论。

例 1. (2021·江西赣州期末) 如图，已知抛物线 $M: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, 1)$ ，过焦点 F 作直线交抛物线于 A, B 两点，在 A, B 两点处的切线相交于 N ，再分别过 A, B 两点作准线的垂线，垂足分别为 C, D 。



(1) 求证：点 N 在定直线上；

(2) 是否存在点 N ，使得 $\triangle BDN$ 的面积是 $\triangle ACN$ 的面积和 $\triangle ABN$ 的面积的和差中项，若存在，请求出点 N 的坐标，若不存在，请说明理由。

【答案】(1) 证明见解析；(2) 存在， $N\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ 。

【分析】(1) 由题意设直线 $AB: y = kx + 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，将直线与抛物线方程联立求出两根之和、两根之积，求出直线 $AN: y = \frac{x_1}{2}x - \frac{x_1^2}{4}$ 以及直线 $BN: y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_2^2}{4}$ ，将两直线联立求出交点即证。

(2) 由(1)知点 N 为 CD 的中点，取 AB 的中点 E ，则 $EN = \frac{AC + BD}{2}$ ，利用抛物线的定义可得 $AB = 2EN$ ，

$S_{\triangle ABN} = S_{\triangle AEN} + S_{\triangle BEN}$ ， $S_{\triangle ACN} = \frac{AF \cdot CN}{2}$ ， $S_{\triangle BDN} = \frac{BF \cdot CN}{2}$ ，根据 $2S_{\triangle BDN} = S_{\triangle ACN} + S_{\triangle ABN}$ ，可得

$2BF = AF + AB$ ，即 $x_2 = -2x_1$ ，结合韦达定理即可求解。

【解析】(1) 由题知 $p=2$ ，所以 $M: x^2=4y$ ，设直线 $AB: y=kx+1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$ ，所以 $\begin{cases} x_1+x_2=4k \\ x_1x_2=-4 \end{cases}$ ，对 $y=\frac{x^2}{4}$ 求导得 $y'=\frac{x}{2}$ ，所以直线 AN 的斜率为

$$k_{AN}=\frac{x_1}{2}，\text{所以直线 } AN: y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1) \text{ 即 } AN: y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4} \text{ ①}$$

$$\text{同理直线 } BN: y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4} \text{ ②}$$

$$\text{联立①和②得 } \begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}=2k \\ y=\frac{x_1x_2}{4}=-1 \end{cases}，\text{所以点 } N \text{ 的坐标为 } (2k, -1)，\text{即点 } N \text{ 在定直线 } y=-1 \text{ 上。}$$

(2) 由 (1) 知点 N 为 CD 的中点，取 AB 的中点 E ，则 $EN=\frac{AC+BD}{2}$ ，由题知 $AC+BD=AB$ ，

$$\text{所以 } AB=2EN，\text{所以 } S_{\triangle ABN}=S_{\triangle AEN}+S_{\triangle BEN}=\frac{EN \cdot CN}{2}+\frac{EN \cdot DN}{2}=2 \times \frac{EN \cdot CN}{2}=\frac{AB \cdot CN}{2}，$$

$$\text{而 } S_{\triangle ACN}=\frac{AC \cdot CN}{2}=\frac{AF \cdot CN}{2}，S_{\triangle BDN}=\frac{BD \cdot DN}{2}=\frac{BF \cdot CN}{2}，$$

若存在点 N 满足题意，则 $2S_{\triangle BDN}=S_{\triangle ACN}+S_{\triangle ABN}$ ，即 $2BF=AF+AB$ ，

$$\text{所以 } 2(x_2-0)=0-x_1+x_2-x_1 \text{ 即 } x_2=-2x_1 \text{ ③}$$

$$\text{又因为 } \begin{cases} x_1+x_2=4k \\ x_1x_2=-4 \end{cases} \text{ ④}$$

将③代入④解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，由 (1) 知 $N(2k, -1)$ 即 $N\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ ，经检验，存在 $N\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ 满足题意。

【点睛】关键点点睛：本题考查了直线与抛物线的位置关系，解题的关键是由 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，求出点 N 的坐标为 $(2k, -1)$ 以及 $x_2=-2x_1$ ，考查了计算能力、推理能力。

例 2. (2021·安徽安庆市·高三一模(文)) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，直线 $l: x-4\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$

过椭圆的左焦点 F ，与椭圆 C 在第一象限交于点 M ，三角形 MFO 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ， A 、 B 分别为椭圆的上下

顶点, P 、 Q 是椭圆上的两个不同的动点

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 PA 的斜率为 k_{PA} , 直线 QB 的斜率为 k_{QB} , 若 $2k_{PA} + k_{QB} = 0$, 问直线 PQ 是否过定点, 若过定点, 求出定点; 否则说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) 直线 PQ 过定点 $(0, 3)$.

【分析】(1) 根据直线 $x - 4\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 过左焦点 F , 得到 $c = \sqrt{3}$, 再由三角形 MFO 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求得点 M 的坐标, 代入椭圆方程求解; (2) 设直线 PA 的方程为 $y = kx + 1$, 则 QB 的方程为 $y = -2kx - 1$, 分别与椭圆方程联立求得点 P , Q 的坐标, 写出 PQ 的直线方程求解.

【解析】(1) 直线 $l: x - 4\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 过左焦点 F , 所以 $F(-\sqrt{3}, 0)$, $c = \sqrt{3}$,

又由 $S_{\triangle OMF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times y_M = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 可知 $y_M = \frac{1}{2}$, 从而椭圆经过点 $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

由椭圆定义知 $2a = \frac{1}{2} + \sqrt{12 + \frac{1}{4}} = 4$, 即 $a = 2$, 故椭圆的方程为 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 PA 的方程为 $y = kx + 1$, 则 QB 的方程为 $y = -2kx - 1$, 由 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $(4k^2 + 1)x^2 + 8kx = 0$,

从而点 P 坐标为 $\left(\frac{-8k}{4k^2 + 1}, \frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1}\right)$,

由 $\begin{cases} y = -2kx - 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $(16k^2 + 1)x^2 + 16kx = 0$, 从而点 Q 坐标为 $\left(\frac{-16k}{16k^2 + 1}, \frac{16k^2 - 1}{16k^2 + 1}\right)$,

由条件知 $k \neq 0$, 从而直线 PQ 的斜率存在, $k_{PQ} = \frac{8k^2 + 1}{4k}$.

所以直线 PQ 的方程为 $y - \frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1} = \frac{8k^2 + 1}{4k} \left(x + \frac{8k}{4k^2 + 1}\right)$, 即 $y = \frac{8k^2 + 1}{4k}x + 3$, 过定点 $(0, 3)$, 故直线 PQ

过定点 $(0, 3)$.

【点睛】方法点睛: 定点问题的常见解法: ①假设定点坐标, 根据题意选择参数, 建立一个直线系或曲线系方程, 而该方程与参数无关, 故得到一个关于定点坐标的方程组, 以这个方程组的解为坐标的点即所求定点; ②

从特殊位置入手，找出定点，再证明该点适合题意.

例 3. (2021·江西重点中学协作体联考) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，长轴为 4，不过原点 O 且不平行

于坐标轴的直线 l 与 C 有两个交点 A, B ，线段 AB 的中点为 M ，直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值 $-\frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 l 过右焦点 F_2 ，问 y 轴上是否存在点 D ，使得三角形 ABD 为正三角形，若存在，求出点 D ，若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; (2) 不存在这样的点 D ，理由见解析.

【分析】(1) 由题意可得 $a=2$ ，设点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，利用点差法可得 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$ ，即可求出 b ，

从而得解；(2) 设直线 $l: y = k(x-1)$ ，联立直线与椭圆方程，消元、列出韦达定理，即可表示出点 M ，假设

存在点 D ，求出 MD 的直线方程，从而得到 D 点坐标，利用弦长公式求出 $|AB|$ 、 $|MD|$ ，由 $\triangle ABD$ 为等边三

角形，则 $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2} |AB|$ ，即可得到方程，即可判断；

【解析】(1) 由题意可知： $2a=4$ ，所以 $a=2$ ，设点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， A, B 在椭圆上，

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots ②$$

$$\text{因为 } k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{3}{4}, \therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{3}{4} \dots\dots\dots ③$$

$$\text{由①-②得 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0, \text{ 即 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0, \text{ 所以 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{由③得 } -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}, \therefore b^2 = 3, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ 设直线 } l: y = k(x-1) \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases} \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2},$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1-1) + k(x_2-1) = k(x_1+x_2) - 2k = k \times \frac{8k^2}{3+4k^2} - 2k = -\frac{6k}{3+4k^2},$$

$$\therefore M\left(\frac{4k^2}{3+4k^2}, -\frac{3k}{3+4k^2}\right),$$

$$\text{假设存在点 } D, \text{ 则 } MD \text{ 的直线方程为: } y + \frac{3k}{3+4k^2} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{4k^2}{3+4k^2}\right), \therefore D\left(0, \frac{k}{3+4k^2}\right),$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2 - 4 \times \frac{4k^2-12}{3+4k^2}} = \frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}.$$

$$|MD| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| \frac{4k^2}{3+4k^2} - 0 \right| = \frac{4|k|\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2},$$

$$\text{若 } \triangle ABD \text{ 为等边三角形则: } |MD| = \frac{\sqrt{3}}{2} |AB|, \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{12(1+k^2)}{3+4k^2} = \frac{4|k|\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2} \text{ 即 } 23k^2 + 27 = 0, \text{ 方程无}$$

实数解, $\therefore$ 不存在这样的点 D .

【点睛】(1)解答直线与椭圆的题目时, 时常把两个曲线的方程联立, 消去 x (或 y) 建立一元二次方程, 然后借助根与系数的关系, 并结合题设条件建立有关参变量的等量关系.

(2)涉及到直线方程的设法时, 务必考虑全面, 不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形.

例 4. 一种作图工具如图 1 所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1$, $MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

(I) 求曲线 C 的方程;

(II) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且

只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.

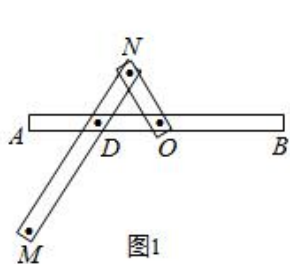


图1

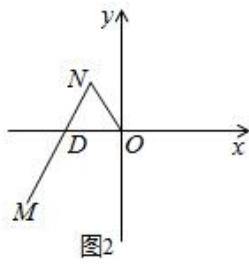


图2

【解析】(I) 设点 $D(t, 0)$ ($|t| \leq 2$), $N(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, 依题意,

$$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{DN}, \text{ 且 } |\overrightarrow{DN}| = |\overrightarrow{ON}| = 1,$$

$$\text{所以 } (t-x, -y) = 2(x_0-t, y_0), \text{ 且 } \begin{cases} (x_0-t)^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} t-x = 2x_0-2t \\ y = -2y_0 \end{cases}, \text{ 且 } t(t-2x_0) = 0.$$

由于当点 D 不动时, 点 N 也不动, 所以 t 不恒等于 0,

$$\text{于是 } t = 2x_0, \text{ 故 } x_0 = \frac{x}{4}, y_0 = -\frac{y}{2}, \text{ 代入 } x_0^2 + y_0^2 = 1, \text{ 可得 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\text{即所求的曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(II) (1) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 为 $x = 4$ 或 $x = -4$, 都有 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.

(2) 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y = kx + m$ ($k \neq \pm \frac{1}{2}$),

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 可得 } (1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 16 = 0.$$

因为直线 l 总与椭圆 C 有且只有一个公共点,

$$\text{所以 } \Delta = 64k^2m^2 - 4(1+4k^2)(4m^2-16) = 0, \text{ 即 } m^2 = 16k^2 + 4. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{又由 } \begin{cases} y = kx + m \\ x - 2y = 0 \end{cases}, \text{ 可得 } P(\frac{2m}{1-2k}, \frac{m}{1-2k}); \text{ 同理可得 } Q(\frac{-2m}{1+2k}, \frac{m}{1+2k}).$$

由原点 O 到直线 PQ 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$ 和 $|PQ| = \sqrt{1+k^2} |x_P - x_Q|$, 可得

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} |m| |x_P - x_Q| = \frac{1}{2} |m| \left| \frac{2m}{1-2k} + \frac{2m}{1+2k} \right| = \left| \frac{2m^2}{1-4k^2} \right|. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{将 } \textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得, } S_{\triangle OPQ} = \left| \frac{2m^2}{1-4k^2} \right| = 8 \left| \frac{4k^2+1}{4k^2-1} \right|.$$

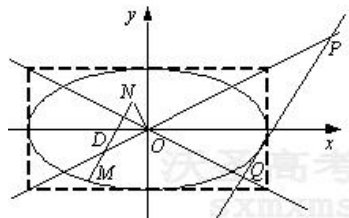
$$\text{当 } k^2 > \frac{1}{4} \text{ 时, } S_{\triangle OPQ} = 8 \left(\frac{4k^2+1}{4k^2-1} \right) = 8 \left(1 + \frac{2}{4k^2-1} \right) > 8;$$

当 $0 \leq k^2 < \frac{1}{4}$ 时, $S_{\triangle OPQ} = 8\left(\frac{4k^2+1}{1-4k^2}\right) = 8\left(-1 + \frac{2}{1-4k^2}\right)$.

因 $0 \leq k^2 < \frac{1}{4}$, 则 $0 < 1-4k^2 \leq 1$, $\frac{2}{1-4k^2} \geq 2$, 所以 $S_{\triangle OPQ} = 8\left(-1 + \frac{2}{1-4k^2}\right) \geq 8$,

当且仅当 $k=0$ 时取等号. 所以当 $k=0$ 时, $S_{\triangle OPQ}$ 的最小值为 8.

综合 (1)(2) 可知, 当直线 l 与椭圆 C 在四个顶点处相切时, $\triangle OPQ$ 的面积取得最小值 8.



【反思提升】

1、探索性问题：此类问题一般分为探究条件、探究结论两种. 若探究条件, 则可先假设条件成立, 再验证结论是否成立, 成立则存在, 否则不存在; 若探究结论, 则应先求出结论的表达式, 再针对其表达式进行讨论, 往往涉及对参数的讨论.

2. 存在性问题, 先假设存在, 推证满足条件的结论, 若结论正确则存在, 若结论不正确则不存在. 注意以下几点:

(1) 当条件和结论不唯一时要分类讨论.

(2) 当给出结论而要推导出存在的条件时, 先假设成立, 再推出条件.

(3) 当条件和结论都不知, 按常规方法解题很难时, 要思维开放, 采取另外的途径.

3、求定值问题常用的方法有两种

(1) 从特殊值入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关.

(2) 直接计算、推理, 并在计算、推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

4、求解直线或圆锥曲线过定点问题的基本思路是: 把直线或圆锥曲线方程中的变量 x, y 看成常数, 把方程的一端化为零, 将方程转化为以参数为主变量的方程, 这个方程对任意参数都成立, 这时参数的系数就要全部等于零, 这样就得到一个关于 x, y 的方程组, 这个方程组的解所确定的点就是直线或圆锥曲线所过的定点.

专题二十七 概率与统计相结合问题

概率与统计是高考考查的核心内容之一, 在高考中一般有 1~2 个选择或者填空题, 一个解答题. 选择或者填空题有针对性地考查概率或统计知识, 主要是对基本概念和基本抽样方法的考查, 试题的难度一般不大;

解答题考查多在概率与统计、算法框图等知识交汇处命题，重点考查抽样方法，频率分布直方图和回归分析或独立性检验，注意加强抽样后绘制频率分布直方图，然后作统计分析或求概率的综合练习.

统计与正态分布、二项分布结合

例 1. (2021·湖北十一校三月联考) 下列命题错误的是 ()

- A. 两个随机变量的线性相关性越强，相关系数的绝对值越接近于 1
 B. 设 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$ ，且 $P(\xi < 0) = 0.2$ ，则 $P(1 < \xi < 2) = 0.2$
 C. 线性回归直线 $\hat{y} = bx + a$ 一定经过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$
 D. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽度越狭窄，其模型拟合的精度越高

【答案】B

【解析】对于 A，根据相关系数的意义可知，A 正确；对于 B，由 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$ ，知 $\mu = 1$ ，即概率密度函数的图像关于直线 $x = 1$ 对称，所以 $P(\xi < 0) = P(\xi > 2) = 0.2$ ，则 $P(1 < \xi < 2) = \frac{1 - 2P(\xi < 0)}{2} = 0.3$ ，故 B 错误；对于 C，根据线性回归直线的性质可知，C 正确；对于 D，根据残差图的意义可知，D 正确.

例 2. 重庆奉节县柑橘栽培始于汉代，历史悠久. 奉节脐橙果皮中厚、脆而易剥，酸甜适度，汁多爽口，余味清香，荣获农业部优质水果、中国国际农业博览会金奖等荣誉. 据统计，奉节脐橙的果实横径(单位：mm)服从正态分布 $N(80, 5^2)$ ，则果实横径在 $[75, 90)$ 的概率为 ()

附：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$ ； $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$.

- A. 0. 6827 B. 0. 8413 C. 0. 8186 D. 0. 9545

【答案】C

【分析】由题得 $\sigma = 5$ ，以及 $P(75 < X < 85) = 0.6827$ 和 $P(70 < X < 90) = 0.9545$ ，利用对称性可得答案.

【解析】由题得 $\sigma = 5$ ， $P(80 - 5 < X < 80 + 5) = 0.6827$ ，

所以 $P(75 < X < 85) = 0.6827$ ， $P(80 - 10 < X < 80 + 10) = 0.9545$ ，

所以 $P(70 < X < 90) = 0.9545$ ，所以 $P(85 < X < 90) = \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359$ ，

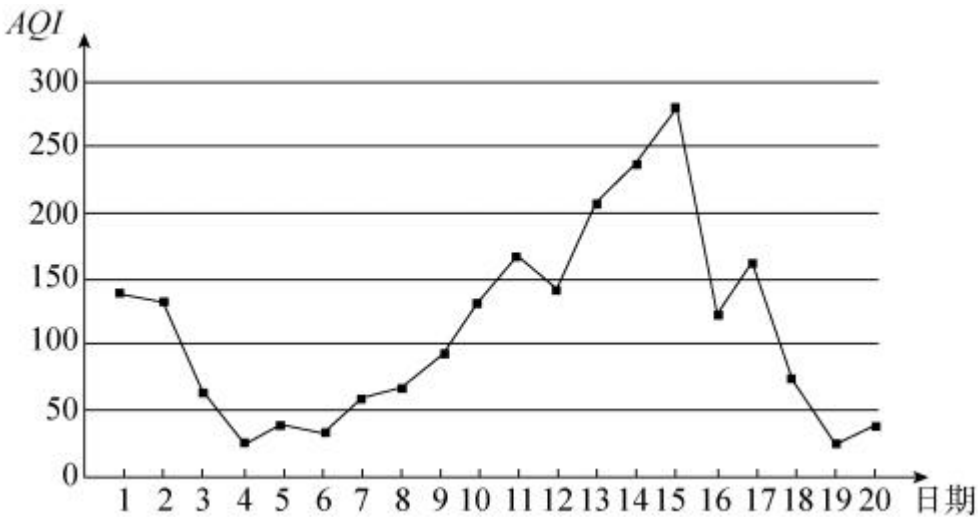
所以果实横径在 $[75, 90)$ 的概率为 $0.6827 + 0.1359 = 0.8186$. 故选 C.

例 3. (2021·山东临沂模拟) 空气质量指数 AQI 是反映空气质量状况的指数，其对应关系如下表：

AQI 指数	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 300	> 300

值						
空气质量	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	严重污染

为监测某化工厂排放废气对周边空气质量指数的影响，某科学兴趣小组在校内测得 10 月 1 日—20 日 AQI 指数的数据并绘成折线图如下：



下列叙述正确的是 ()

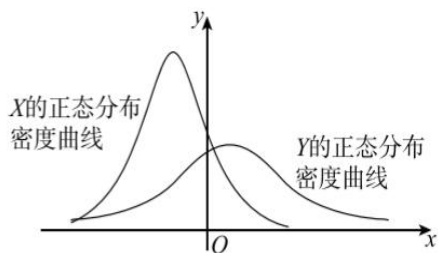
- A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略大于 150
- B. 这 20 天中的空气质量为优的天数占 $\frac{1}{4}$
- C. 10 月 4 日到 10 月 11 日，空气质量越来越好
- D. 总体来说，10 月中旬的空气质量比上旬的空气质量好

【答案】B

【分析】通过表格可知， AQI 数值越大，说明空气污染越严重，质量不好，数值越小空气质量越好，体现在图标上就是点的位置越高空气污染越严重，点的位置越低空气质量越好，可以通过将点计数来确定中位数的大概位置，以及空气质量为优的天数.

【解析】由折线图知 100 以上有 10 个，100 以下有 10 个，中位数是 100 两边两个数的均值，观察比 100 的数离 100 远点，因此两者均值大于 100 但小于 150，A 错；空气质量为优的有 5 天，占 $\frac{1}{4}$ ，B 正确；10 月 4 日到 10 月 11 日，空气质量越来越差，C 错；10 月上旬的空气质量 AQI 指数值在 100 以下的多，中旬的空气质量 AQI 指数值在 100 以上的多，上旬的空气质量比中旬的空气质量好，D 错. 故选 B.

例 4. (2021·广东肇庆市·高三二模) 已知两种不同型号的电子元件 (分别记为 X , Y) 的使用寿命均服从正态分布, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示, 则下列结论错误的是 ()



参考数据：若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

- A. $P(\mu_1 - \sigma_1 < X < \mu_1 + 2\sigma_1) \approx 0.8186$ B. $P(Y \geq \mu_2) < P(Y \geq \mu_1)$
- C. $P(X \leq \sigma_2) < P(X \leq \sigma_1)$ D. 对于任意的正数 t ，有 $P(X \leq t) > P(Y \leq t)$

【答案】C

【分析】抓住平均数 μ 和标准差 σ 这两个关键量，结合正态曲线的图形特征分析即可.

【解析】对于 A， $P(\mu_1 - \sigma_1 < X < \mu_1 + 2\sigma_1) \approx (0.6827 + 0.9545) \times \frac{1}{2} = 0.8186$ ，A 选项正确；

对于 B，由正态分布密度曲线，可知 $\mu_1 < \mu_2$ ，所以 $P(Y \geq \mu_2) < P(Y \geq \mu_1)$ ，B 选项正确；

对于 C，由正态分布密度曲线，可知 $\sigma_1 < \sigma_2$ ，所以 $P(X \leq \sigma_2) > P(X \leq \sigma_1)$ ，C 选项错误；

对于 D，对于任意的正数 t ，由图像知 $P(X \leq t)$ 表示的面积始终大于 $P(Y \leq t)$ 表示的面积，所以

$P(X \leq t) > P(Y \leq t)$ ，D 选项正确，故选 C.

例 5. 下列命题中，正确命题的序号为_____.

①已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，若 $E(X) = 30, D(X) = 20$ ，则 $p = \frac{2}{3}$ ；

②将一组数据中的每个数据都加上同一个常数后，方差恒不变；

③设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0, 1)$ ，若 $P(\xi \leq 1) = p$ ，则 $P(-1 < \xi \leq 0) = \frac{1}{2} - p$ ；

④某人在 10 次射击中，击中目标的次数为 $X, X \sim B(10, 0.8)$ ，则当 $X = 8$ 时概率最大.

【答案】②③④

【分析】根据二项分布的均值与方差公式计算判断 A，由方差公式判断 B，由正态分布判断 C，由独立重复试验的概率公式判断 D.

【解析】根据二项分布的数学期望和方差的公式，可得 $E(X) = np = 30, D(X) = np(1 - p) = 20$ ，解得 $p = \frac{1}{3}$ ，

所以①错误；根据方差的计算公式可知，将一组数据中的每个数据都加上同一个常数后，方差恒不变，所以②

正确；由正态分布的图像的对称性可得 $P(-1 < \xi \leq 0) = \frac{1 - 2P(\xi \leq -1)}{2} = \frac{1 - 2p}{2} = \frac{1}{2} - p$ ，所以③正确；由独立重

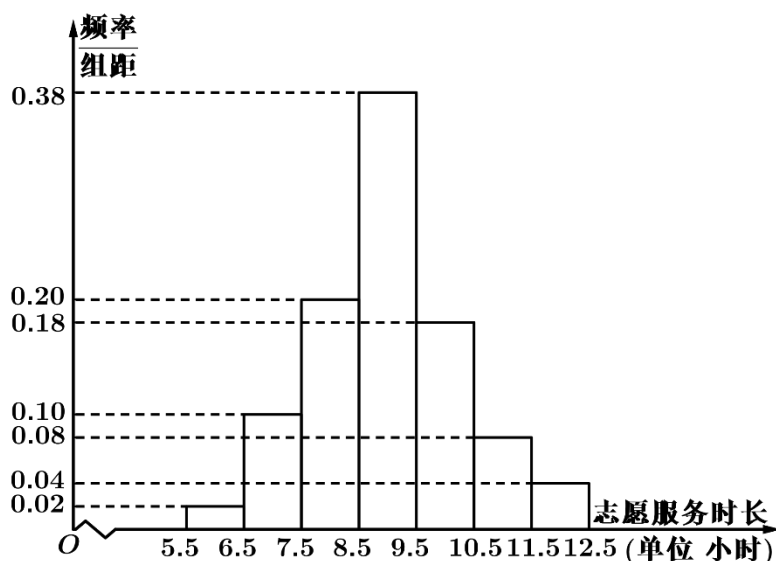
复试验的概率的计算公式可得，由 $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_{10}^k 0.8^k \cdot 0.2^{10-k}}{C_{10}^{k-1} 0.8^{k-1} 0.2^{11-k}} = \frac{4(11-k)}{k} > 1$ ，得 $k < 8.8$ ，即 $k \leq 8$ 时，

$P(X=k) > P(X=k-1)$ ，同理得 $k \geq 9$ 时， $P(X=k) < P(X=k-1)$ ，即 $P(X=8)$ 最大，

$P(X=8) = C_{10}^8 (0.8)^8 (1-0.8)^2$ ，所以④正确。所以正确命题的序号为②③④。

【点睛】 本题考查二项分布，正态分布，随机变量的方差。正态分布曲线具有对称性，常常出现由对称性求概率问题，二项分布中概率公式是 $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ，可用作商法确定其中的最大值或最小值。

例 6. 某地在全国志愿服务信息系统注册登记志愿者 8 万多人。2019 年 7 月份以来，共完成 1931 个志愿服务项目，8900 多名志愿者开展志愿服务活动累计超过 150 万小时。为了了解此地志愿者对志愿服务的认知和参与度，随机调查了 500 名志愿者每月的志愿服务时长（单位：小时），并绘制如图所示的频率分布直方图。



(1) 求这 500 名志愿者每月志愿服务时长的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 （同一组中的数据用该组区间的中间值代表）；

(2) 由直方图可以认为，目前该地志愿者每月服务时长 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ ， σ^2 近似为样本方差 s^2 。一般正态分布的概率都可以转化为标准正态分布的概率进行计算：若

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 令 } Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \text{ 则 } Y \sim N(0, 1), \text{ 且 } P(X \leq a) = P\left(Y \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

(i) 利用直方图得到的正态分布, 求 $P(X \leq 10)$;

(ii) 从该地随机抽取 20 名志愿者, 记 Z 表示这 20 名志愿者中每月志愿服务时长超过 10 小时的人数, 求 $P(Z \geq 1)$ (结果精确到 0.001) 以及 Z 的数学期望.

参考数据: $\sqrt{1.64} \approx 1.28$, $0.7734^{20} \approx 0.0059$. 若 $Y \sim N(0, 1)$, 则 $P(Y \leq 0.78) = 0.7734$.

【答案】 (1) 9, 1.64; (2) (i) 0.7734, (ii) 0.994, 4.532.

【分析】 (1) 根据平均数和方差的公式直接求解即可.

(2) (i) 由 (1) 可得由题知 $\mu = 9$, $\sigma^2 = 1.64$, 所以 $X \sim N(9, 1.64)$, 则 $P(X \leq 10) = P\left(Y \leq \frac{10-9}{1.28}\right)$ 可得答案.

(ii) (i) 知 $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0.2266$, 则 $Z \sim B(20, 0.2266)$ 从而可得答案.

【解析】 (1) $\bar{x} = 6 \times 0.02 + 7 \times 0.1 + 8 \times 0.2 + 9 \times 0.38 + 10 \times 0.18 + 11 \times 0.08 + 12 \times 0.04 = 9$.

$s^2 = (6-9)^2 \times 0.02 + (7-9)^2 \times 0.1 + (8-9)^2 \times 0.2 + (9-9)^2 \times 0.38 + (10-9)^2 \times 0.18 + (11-9)^2 \times 0.08 + (12-9)^2 \times 0.04 = 1.64$.

(2) (i) 由题知 $\mu = 9$, $\sigma^2 = 1.64$, 所以 $X \sim N(9, 1.64)$, $\sigma = \sqrt{1.64} \approx 1.28$.

所以 $P(X \leq 10) = P\left(Y \leq \frac{10-9}{1.28}\right) = P(Y \leq 0.78) = 0.7734$.

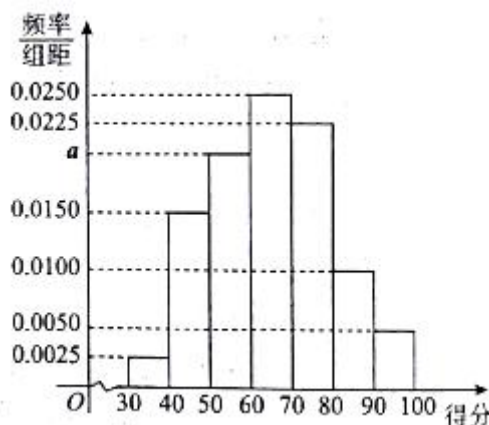
(ii) 由 (i) 知 $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0.2266$, 可得 $Z \sim B(20, 0.2266)$.

$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - 0.7734^{20} \approx 1 - 0.0059 = 0.9941 \approx 0.994$.

故 Z 的数学期望 $E(Z) = 20 \times 0.2266 = 4.532$.

【点睛】 关键点睛: 本题考查根据频率分布直方图求平均数和方差以及根据正态分布求概率和二项分布问题, 解答本题的关键是将问题“从该地随机抽取 20 名志愿者, 记 Z 表示这 20 名志愿者中每月志愿服务时长超过 10 小时的人数”, 转化为得到 $Z \sim B(20, 0.2266)$, 属于中档题.

例 7. 2019 年是某市大力推进居民生活垃圾分类的关键一年, 有关部门为宣传垃圾分类知识, 面向该市市民进行了一次“垃圾分类知识”的网络问卷调查, 每位市民仅有一次参与机会, 通过抽样, 得到参与问卷调查中的 1000 人的得分数据, 其频率分布直方图如图所示:



- (1) 估计该组数据的中位数、众数；
- (2) 由频率分布直方图可以认为，此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$ ， μ 近似为这 1000 人得分的平均值（同一组数据用该区间的中点值作代表），利用该正态分布，求 $P(50.5 < Z < 94)$ ；
- (3) 在 (2) 的条件下，有关部门为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案：
- (i) 得分不低于 μ 可获赠 2 次随机话费，得分低于 μ 则只有 1 次；
- (ii) 每次赠送的随机话费 and 对应概率如下：

赠送话费(单位:元)	10	20
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

现有一位市民要参加此次问卷调查，记 X （单位：元）为该市民参加问卷调查获赠的话费，求 X 的分布列和数学期望。

附： $\sqrt{210}=14.5$ ，

若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ 。

【答案】(1) 中位数为 65，众数为 65. (2) 0.8185 (3) $EX = \frac{75}{4}$ ，分布列见解析

【解析】(1) 由 $(0.0025 + 0.0050 + 0.0100 + 0.0150 + a + 0.0225 + 0.0250) \times 10 = 1$ ，得 $a = 0.0200$ ，设中位数为 x ，由 $(0.0025 + 0.0150 + 0.0200) \times 10 + (x - 60) \times 0.0250 = 0.5000$ ，解得 $x = 65$ ，由频率分布直方图可知众数为 65.

(2) 从这 1000 人问卷调查得到的平均值 μ 为

$$\mu = 35 \times 0.025 + 45 \times 0.15 + 55 \times 0.20 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.225 + 85 \times 0.1 + 95 \times 0.05$$

$=0.875+6.75+11+16.25+16.875+8.5+4.75=65$ ，因为由于得分 Z 服从正态分布 $N(65, 210)$ ，

所以 $P(50.5 < Z < 94) = P(60 - 14.5 < Z < 60 + 14.5 \times 2) = \frac{0.6826 + 0.9544}{2} = 0.8185$ 。

(3) 设得分不低于 μ 分的概率为 p ，则 $P(Z \geq \mu) = \frac{1}{2}$ ， X 的取值为 10, 20, 30, 40，

$$P(X=10) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{8}, \quad P(X=20) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{32},$$

$$P(X=30) = \frac{1}{2} \times C_2^1 \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{16}, \quad P(X=40) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32},$$

所以 X 的分布列为：

X	10	20	30	40
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

所以 $EX = 10 \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{13}{32} + 30 \times \frac{3}{16} + 40 \times \frac{1}{32} = \frac{75}{4}$ 。

统计与独立性检验结合

例 1. (2021·山西临汾市·高三一模(理)) 这一年来人类与新型冠状病毒的“战争”让人们逐渐明白一个道理，人类社会组织模式的差异只是小事情，病毒在地球上存在了三四十亿年，而人类的文明史不过只有几千年而已，人类无法消灭病毒，只能与之共存，或者病毒自然消亡，在病毒面前，个体自由要服从于集体或者群体生命的价值。在传染病学中，通常把从致病刺激物侵入机体内或者对机体发生作用起，到机体出现反应或开始呈现该疾病对应的相关症状时止的这一阶段称为潜伏期，因此我们应该注意做好良好的防护措施和隔离措施。某研究团队统计了某地区 10000 名患者的相关信息，得到如表表格：

潜伏期(天)	(0,2]	(2,4]	(4,6]	(6,8]	(8,10]	(10,12]	(12,14]
人数	600	1900	3000	2500	1600	250	150

(1) 新冠肺炎的潜伏期受诸多因素的影响，为研究潜伏期与年龄的关系，通过分层抽样从 10000 名患者中抽取 200 人进行研究，完成下面的 2×2 列联表，并判断能否在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为潜伏期与患者年龄有关？

	潜伏期 ≤ 8 天	潜伏期 > 8 天	总计
60岁以上(含60岁)			150
60岁以下	30		
总计			200

(2) 依据上述数据, 将频率作为概率, 且每名患者的潜伏期是否超过 8 天相互独立. 为了深入研究, 该团队在这一地区抽取了 20 名患者, 其中潜伏期不超过 8 天的人数最有可能是多少?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0. 150	0. 100	0. 050	0. 025	0. 010	0. 005	0. 001
k_0	2. 072	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635	7. 879	10. 828

【答案】(1) 表格见解析, 能; (2) 16 名.

【分析】(1) 由表中数据可知, 求得潜伏期大于 8 天的人数, 列出 2×2 列联表, 利用公式求得 K^2 的值, 结合附表, 即可得到结论; (2) 求得该地区 10000 名患者中潜伏期不超过 8 天的人数, 求得潜伏期不超过 8 天的概率, 进而抽取的 20 名患者中潜伏期不超过 8 天的人数.

【解析】(1) 由表中数据可知, 潜伏期大于 8 天的人数为 $\frac{1600+250+150}{10000} \times 200 = 40$ 人,

补充完整的 2×2 列联表如下,

	潜伏期 ≤ 8 天	潜伏期 > 8 天	总计
60岁以上(含60岁)	130	20	150
60岁以下	30	20	50
总计	160	40	200

所以 $K^2 = \frac{200 \times (130 \times 20 - 30 \times 20)^2}{150 \times 50 \times 160 \times 40} \approx 16.667 > 10.828$,

故能在犯错误的概率不超过 0. 001 的前提下认为潜伏期与患者年龄有关.

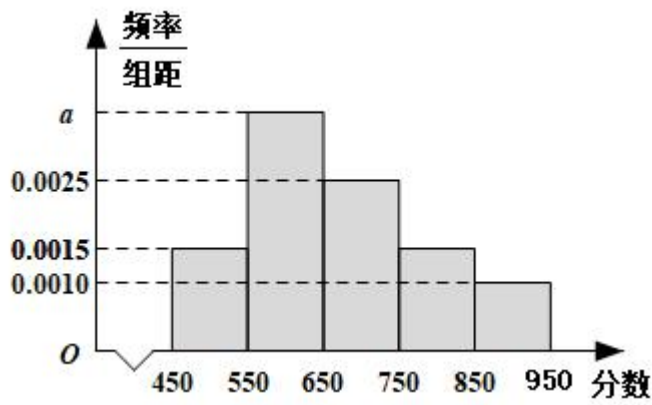
(2) 该地区 10000 名患者中潜伏期不超过 8 天的人数为 $600+1900+3000+2500=8000$ 名,

将频率视为概率, 潜伏期不超过 8 天的概率为 $\frac{8000}{10000}=\frac{4}{5}$,

所以抽取的 20 名患者中潜伏期不超过 8 天的人数最有可能是 $20\times\frac{4}{5}=16$ 名.

统计与独立性检验、随机变量分布列结合

例 1. (2021·辽宁铁岭市·高三一模) 某学校共有 1000 名学生参加知识竞赛, 其中男生 400 人, 为了解该校学生在知识竞赛中的情况, 采取分层抽样随机抽取了 100 名学生进行调查, 分数分布在 450~950 分之间, 根据调查的结果绘制出的学生分数频率分布直方图如图所示:



将分数不低于 750 分的学生称为“高分选手”.

- (1) 求 a 的值, 并估计该校学生分数的平均数、中位数和众数 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);
- (2) 现采用分层抽样的方式从分数落在 $[550,650)$, $[750,850)$ 内的两组学生中抽取 10 人, 再从这 10 人中随机抽取 3 人, 记被抽取的 3 名学生中属于“高分选手”的学生人数为随机变量 X , 求 X 的分布列及数学期望;
- (3) 若样本中属于“高分选手”的女生有 10 人, 完成下列 2×2 列联表, 并判断是否有 97.5% 的把握认为该校学生属于“高分选手”与“性别”有关?

	属于“高分选手”	不属于“高分选手”	合计
男生			
女生			
合计			

(参考公式: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 期中 $n=a+b+c+d$)

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【答案】(1) $a = 0.0035$ ，中位数 650，众数 600；(2) 分布列见解析；期望为 $\frac{9}{10}$ ；(3) 填表见解析；有.

【分析】(1) 由频率分布直方图中频率和为 1 可求得 a ，每组数据用该组区间的中点值乘以频率相加得均值；

(2) 由频率分布直方图知从 [550, 650) 中抽取 7 人，从 [750, 850) 中抽取 3 人，随机变量 X 的所有可能取值有 0, 1, 2, 3，求出各概率得分布列，然后由期望公式得期望；

(3) 样本中男生 40 人，女生 60 人属于“高消费群”的 25 人，其中女生 10 人，由频率分布直方图求出高消费群人数，可得高消费群中男生人数，从而可填写列联表，并计算出 K^2 后可得结论.

【解析】(1) 由题意知 $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.001) = 1$ ，解得 $a = 0.0035$ ，

样本平均数为 $\bar{x} = 500 \times 0.15 + 600 \times 0.35 + 700 \times 0.25 + 800 \times 0.15 + 900 \times 0.10 = 670$ ，中位数 650，众数 600.

(2) 由题意，从 [550, 650) 中抽取 7 人，从 [750, 850) 中抽取 3 人，随机变量 x 的所有可能取值有 0, 1, 2,

3, $P(x=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3} (k=0,1,2,3)$ ，所以随机变量 X 的分布列为：

P	0	1	2	3
X	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \frac{63}{120} + 2 \times \frac{21}{120} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}$.

(3) 由题可知，样本中男生 40 人，女姓 60 人，属于“高分选手”的 25 人，其中女姓 10 人；得出以下 2×2 列联表：

	属于“高分选手”	不属于“高分选手”	合计
男生	15	25	40
女生	10	50	60
合计	25	75	100

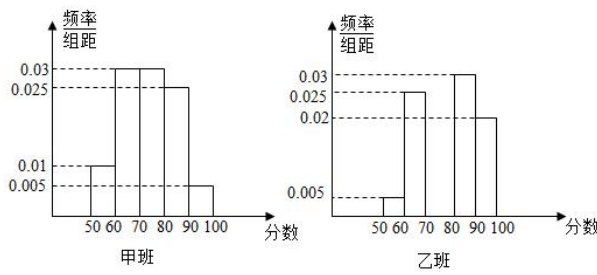
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100(10 \times 25 - 15 \times 50)^2}{25 \times 75 \times 40 \times 60} = \frac{50}{9} \approx 5.556 > 5.024,$$

所以有 97.5 % 的把握认为该校学生属于“高分选手”与性别有关.

【点睛】超几何分布描述的是不放回抽样问题，随机变量为抽到的某类个体的个数. 超几何分布的特征是：①考查对象分两类；②已知各类对象的个数；③从中抽取若干个个体，考查某类个体个数 X 的概率分布，超几何分布主要用于抽检产品、摸不同类别的小球等概率模型，其实质是古典概型.

统计与古典概型、抽样、独立性检验结合

例 1. 某校为了推动数学教学方法的改革，学校将高一年级部分生源情况基本相同的学生分成甲、乙两个班，每班各 40 人，甲班按原有模式教学，乙班实施教学方法改革. 经过一年的教学实验，将甲、乙两个班学生一年来的数学成绩取平均数，两个班学生的平均成绩均在 $[50,100]$ ，按照区间 $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$ 进行分组，绘制成如下频率分布直方图，规定不低于 80 分(百分制)为优秀.



(1) 完成表格，并判断是否有 90%以上的把握认为“数学成绩优秀与教学改革有关”；

	甲班	乙班	总计
大于等于 80 分的人数			
小于 80 分的人数			
总计			

2) 从乙班 $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$ 分数段中，按分层抽样随机抽取 7 名学生座谈，从中选三位同学发言，记

来自 $[80,90)$ 发言的人数为随机变量 X ，求 X 的分布列和期望. 附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2 \geq k_0)$	0. 10	0. 05	0. 025

k_0	2. 706	3. 841	5. 024

【答案】(1) 表格见解析, 有 90% 以上的把握认为“数学成绩优秀与教学改革有关”(2) 分布列见解析, 期望为

$$\frac{9}{7}$$

【解析】(1) 列联表如下:

	甲班	乙班	总计
大于等于 80 分的人数	12	20	32
小于 80 分的人数	28	20	48
总计	40	40	80

依题意得 $K^2 = \frac{40 \times (12 \times 20 - 28 \times 20)^2}{40 \times 40 \times 32 \times 48} \approx 3.333 > 2.706$,

有 90% 以上的把握认为“数学成绩优秀与教学改革有关”.

(2) 从乙班 $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$, 乙班 $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 频率分别为 0.2, 0.3, 0.2,

分数段中抽人数分别为 2, 3, 2, 依题意随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}, \quad P(X=2) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35},$$

$\therefore X$ 的分布列为:

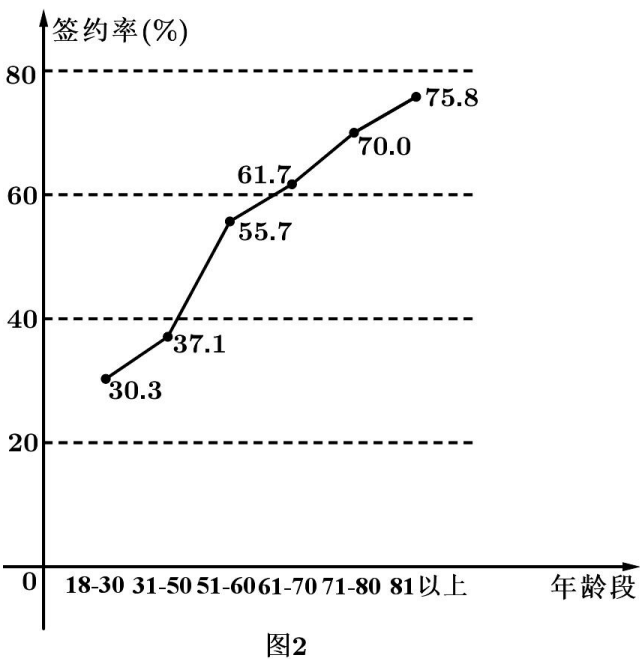
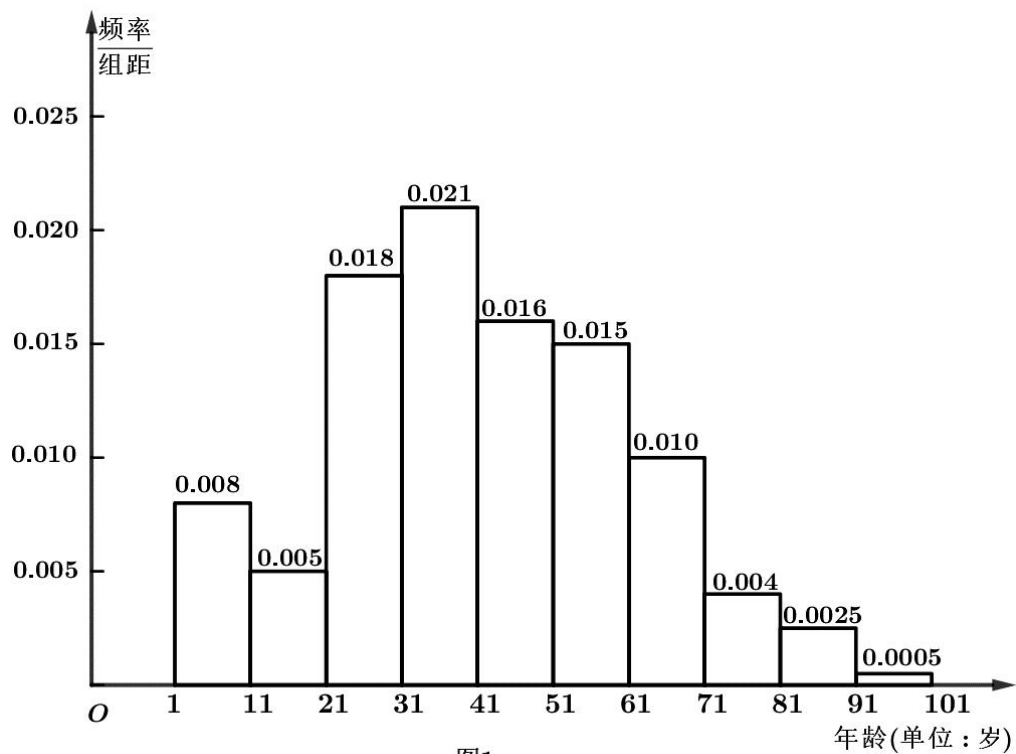
X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}.$$

统计与独立性检验、二项分布结合

例 1. (2021·内蒙古呼和浩特市·高三一模(理)) 根据国家深化医药卫生体制改革的总体部署和要求, 某地区自 2015 年起, 开始逐步推行“基层首诊、逐级转诊”的医疗制度, 从而全面推行家庭医生签约服务. 已知该地区居民约为 2000 万, 从 1 岁到 101 岁的居民年龄结构的频率分布直方图如图 1 所示. 为了解各年龄段居民签约家庭

医生的情况，现调查了 1000 名年满 18 周岁的居民，各年龄段被访者签约率如图 2 所示.



- (1) 根据图 1 和图 2 的信息，估计该地区签约率超过 35% 低于 60% 的人群的总人数；
- (2) 若以图 2 中年龄在 71~80 岁居民签约率作为此地区该年龄段每个居民签约家庭医生的概率，现从该地区年龄在 71~80 岁居民中随机抽取 3 人，记抽到的签约人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望；
- (3) 据统计，该地区被访者的签约率约为 43%。为把该地区年满 18 周岁居民的签约率提高到 55% 以上，应着重提高图 2 中哪个年龄段的签约率？并结合数据对你的结论作出解释。

【答案】(1) 总人数为1040万；(2) 分布列答案见解析，数学期望：2.1；(3) 着重提高31~50这个年龄段的签约率，解释答案见解析。

【分析】(1) 由图2可知签约率超过35%低于60%的人群得年龄为31~50岁、51~60岁，再根据频率分布直方图求出对应的三个小长方形的面积之和即可；

(2) 该地区年龄在71~80岁居民中0.7， $X \sim B(3, 0.7)$ 利用二项分布的概率公式计算出概率即可得分布列和数学期望；

(3) 由图1，2列出表格，可以得出该地区在31~50岁这个年龄段的人数多，签约率低，即可得正确答案。

【解析】由图2可知签约率超过35%低于60%的人群得年龄为31~50岁、51~60岁，

由表1易得所求频率 $P = (0.021 + 0.016 + 0.015) \times 10 = 0.52$ ，

所以估计该地区签约率超过35%低于60%的人群的总人数为 $0.52 \times 2000 = 1040$ 万。

(2) 该地区年龄在71~80岁居民中0.7，抽到的签约人数为 X 可能为：0，1，2，3，易得 $X \sim B(3, 0.7)$ ，

$$P(X=i) = C_3^i 0.7^i 0.3^{3-i}, \quad i=0,1,2,3, \quad P(X=0) = C_3^0 0.7^0 0.3^3 = 0.027,$$

$$P(X=1) = C_3^1 0.7^1 0.3^2 = 0.189, \quad P(X=2) = C_3^2 0.7^2 0.3^1 = 0.441, \quad P(X=3) = C_3^3 0.7^3 0.3^0 = 0.343,$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0. 027	0. 189	0. 441	0. 343

$$\therefore E(X) = 3 \times 0.7 = 2.1.$$

(3) 应该着重提高31~50这个年龄段的签约率。

由图1，2知，

年龄段	该地区人数(万)	签约率%
18~30	$0.005 \times 10 \times 2000 = 100$ $0.018 \times 10 \times 2000 = 360$ 大于360，小于460	30. 3
31~40，41~50	$(0.021 + 0.016) \times 10 \times 2000 = 740$	37. 1
51~60	$0.015 \times 10 \times 2000 = 300$	55. 7

61~70	$0.010 \times 10 \times 2000 = 200$	61.7
71~80	$0.004 \times 10 \times 2000 = 80$	70.0
80 以上	$0.010 \times 10 \times 2000 = 200$	75.8

由以上数据可知这个地区在 31~50 这个年龄段的人为 740 万,基数较其他年龄段是最大的,且签约率为 37.1%,比较低,所以为把该地区满 18 周岁居民的签约率提高到 55%以上,应该着重提高 31~50 这个年龄段的签约率.

【点睛】思路点睛:

求离散型随机变量的分布列及期望的一般步骤:

- (1) 根据题中条件确定随机变量的可能取值;
- (2) 求出随机变量所有可能取值对应的概率,即可得出分布列;
- (3) 根据期望的概念,结合分布列,即可得出期望(在计算时,要注意随机变量是否服从特殊的分布,如超几何分布或二项分布等,可结合其对应的概率计算公式及期望计算公式,简化计算)

古典概型与抽样方法结合

古典概型与抽样方法结合问题的考查往往主要是考查统计中的几种抽样方法. 特别注意辨别系统抽样、简单随机抽样和分层抽样的适用范围和操作步骤 .

例 1. (2021·北京门头沟区·高三一模) 第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月在北京和张家口举办,为了普及冬奥知识,京西某校组织全体学生进行了冬奥知识答题比赛,从全校众多学生中随机选取了 20 名学生作为样本,得到他们的分数统计如下:

分数段	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
人数	1	2	2	8	3	3	1

我们规定 60 分以下为不及格; 60 分及以上至 70 分以下为及格; 70 分及以上至 80 分以下为良好; 80 分及以上为优秀.

- (I) 从这 20 名学生中随机抽取 2 名学生, 恰好 2 名学生都是优秀的概率是多少?
- (II) 将上述样本统计中的频率视为概率, 从全校学生中随机抽取 2 人, 以 X 表示这 2 人中优秀人数, 求 X 的分布列与期望.

【答案】(1) $\frac{3}{95}$; (2) 分布列见详解; $E(X) = \frac{2}{5}$.

【分析】(1) 利用组合数以及古典概型的概率计算公式即可求解; (2) 由题意可得 $x = 0, 1, 2$, 再利用二项分布

的概率计算公式列出分布列，从而求出数学期望.

【解析】(1) 记恰好 2 名学生都是优秀的事件为 A，则 $P(A) = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{6}{190} = \frac{3}{95}$.

(2) 抽到一名优秀学生的概率为 $p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ ，X 的取值为 0, 1, 2， $P(X=0) = C_2^0 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{16}{25}$ ，

$P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{8}{25}$ ， $P(X=2) = C_2^2 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ ，

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$E(X) = 0 \times \frac{16}{25} + 1 \times \frac{8}{25} + 2 \times \frac{1}{25} = \frac{2}{5}$$

古典概型与独立性检验、回归方程相结合

古典概型与独立性检验、回归方程相结合问题的考查往往主要是考查独立性检验、回归方程的求法和步骤. 特别注意回归方程求解过程中公式的灵活应用和独立性检验求解过程中的解题步骤.

例 1. (2021·福建漳州市·龙海二中高三月考) 5 月 28 日，十三届全国人大三次会议表决通过了《中华人民共和国民法典》，自 2021 年 1 月 1 日起施行.《中华人民共和国民法典》被称为“社会生活的百科全书”，是新中国第一部以法典命名的法律，在法律体系中居于基础性地位，也是市场经济的基本法，为了增强学生的法律意识，了解法律知识，某校组织全校学生进行学习《中华人民共和国民法典》知识竞赛，从中随机抽取 100 名学生的成绩(单位：分)统计得到如下表格：

成绩 性别	[0,60]	[60,70]	[70,80]	[80,90]	[90,100]
男	5	14	16	13	4
女	3	11	13	15	6

规定成绩在 [90,100] 内的学生获优秀奖.

(1) 根据以上成绩统计，判断是否有 90% 的把握认为该校学生在知识竞赛中获优秀奖与性别有关？

(2) 在抽取的100名学生中,若从获优秀奖的学生中随机抽取3人进行座谈,记 X 为抽到获优秀奖的女生人数,求 X 的分布列和数学期望.

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.01	0.001
k	2.706	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc^2)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

【答案】(1) 有90%的把握认为该校学生在知识竞赛中获优秀奖与性别无关;(2) 分布列答案见解析,数学期望: $\frac{9}{5}$.

【分析】(1) 依题意完善列联表,计算 K^2 ,再与观测值比较即可判断;

(2) 依题意得 X 的所有可能取值为0,1,2,3,求出所对应的概率,列出分布列,求出数学期望;

【解析】(1) 依题意得,列联表如下:

是否获奖 性别	获优秀奖	未获优秀奖	合计
男	4	48	52
女	6	42	48
	10	90	100

假设 H_0 :“该校学生在知识竞赛中获优秀奖与性别无关”,当 H_0 成立时, $P(K^2 \geq 2.706) \approx 0.1$.

将列联表中的数据代入公式,计算得 $K^2 = \frac{100 \times (4 \times 42 - 48 \times 6)^2}{52 \times 48 \times 10 \times 90} \approx 0.641$.

因为 $0.641 < 2.706$,所以小概率事件未发生,从而接受假设 H_0 .

所以在犯错误的概率不超过0.1的前提下可以推断该校学生在知识竞赛中获优秀奖与性别无关,即有90%的把握认为该校学生在知识竞赛中获优秀奖与性别无关.

(2) 依题意得, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}, P(X=1)=\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}, P(X=2)=\frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}, P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}.$

古典概型与统计图表结合

例 1. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区: 62 73 81 92 95 85 74 64 53 76

78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B 地区: 73 83 62 51 91 46 53 73 64 82

93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

(1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度(不要求计算出具体值, 给出结论即可);

A 地区	B 地区
	4
	5
	6
	7
	8
	9

(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C : “A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”. 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据, 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率, 求 C 的概率.

【解析】(1) 两地区用户满意度评分的茎叶图如下

A 地区					B 地区				
				3	4	6	8		
			6	4	2	5	1	3	6
		6	4	2	6	2	4	5	5
6	8	8	6	4	3	7	3	3	4
9	2	8	6	5	1	8	3	2	1
		7	5	5	2	9	1	3	

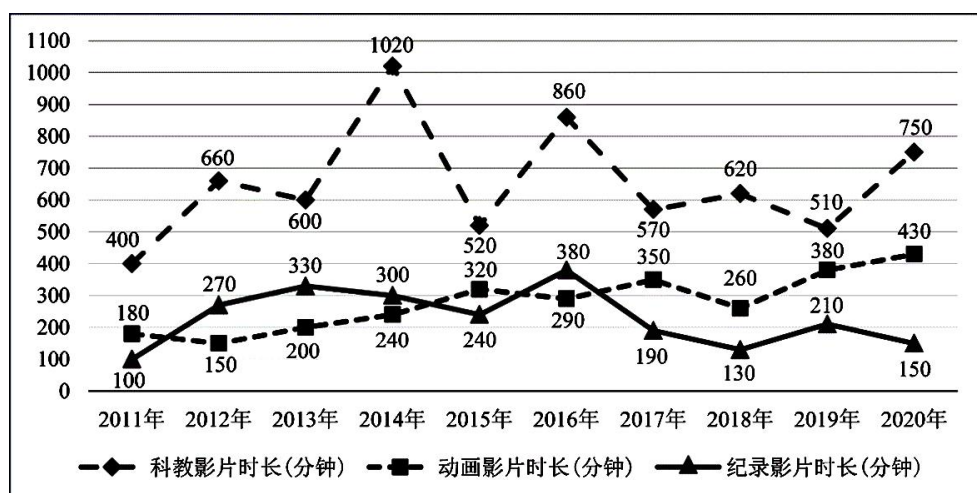
通过茎叶图可以看出, A 地区用户满意度评分的平均值高于 B 地区用户满意度评分的平均值; A 地区用户满意度评分比较集中, B 地区用户满意度评分比较分散.

(2) 记 C_{A1} 表示事件: “A 地区用户的满意度等级为满意或非常满意”; C_{A2} 表示事件: “A 地区用户的满意度等级为非常满意”; C_{B1} 表示事件: “B 地区用户的满意度等级为不满意”; C_{B2} 表示事件: “B 地区用户的满意度等级为满意”, 则 C_{A1} 与 C_{B1} 独立, C_{A2} 与 C_{B2} 独立, C_{B1} 与 C_{B2} 互斥, $C = C_{B1}C_{A1} \cup C_{B2}C_{A2}$. $P(C) = P(C_{B1}C_{A1} \cup C_{B2}C_{A2})$

$= P(C_{B1}C_{A1}) + P(C_{B2}C_{A2}) = P(C_{B1})P(C_{A1}) + P(C_{B2})P(C_{A2})$. 由所给数据得 C_{A1} , C_{A2} , C_{B1} , C_{B2} 发生的频率分别为 $\frac{16}{20}$,

$\frac{4}{20}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{8}{20}$, 故 $P(C_{A1}) = \frac{16}{20}$, $P(C_{A2}) = \frac{4}{20}$, $P(C_{B1}) = \frac{10}{20}$, $P(C_{B2}) = \frac{8}{20}$, $P(C) = \frac{10}{20} \times \frac{16}{20} + \frac{8}{20} \times \frac{4}{20} = 0.48$.

73. (2021·北京丰台区·高三一模) 某电影制片厂从 2011 年至生产的科教影片、动画影片、纪录影片的时长(单位: 分钟)如图所示.



- 从 2011 年至中任选一年, 求此年动画影片时长大于纪录影片时长的概率;
- 从 2011 年至中任选两年, 设 X 为选出的两年中动画影片时长大于纪录影片时长的年数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;
- 将 2011 年至生产的科教影片、动画影片、纪录影片时长的方差分别记为 s_1^2, s_2^2, s_3^2 , 试比较 s_1^2, s_2^2, s_3^2 的大小. (只需写出结论)

【答案】 (1) $\frac{3}{5}$; (2) 分布列见解析, $\frac{6}{5}$; (3) $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2 \dots$

【分析】 (1) 由统计图表知 10 年有 6 年时间动画影片时长大于纪录影片时长, 由此可得概率;

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 计算出各概率, 可得分布列, 由期望公式计算出期望;

(3) 根据统计图表中的数据计算出方差后可得.

【解析】(1) 从 2011 年至中任选一年, 动画影片时长大于纪录影片时长的年份分别是 2011 年, 2015 年, 2017 年, 2018 年, 2019 年和, 共 6 年.

记从 2011 年至中任选一年, 此年动画影片时长大于纪录影片时长为事件 A , 则 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}; \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}; \quad P(X=2) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{2}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{5}.$$

(3) 科教影片所记录时长波动较大, 方差最大, 动画影片、纪录影片的时长需计算出方差才能确定.

$$\bar{x}_2 = \frac{180+150+200+240+320+290+350+260+380+430}{10} = 281,$$

$$s_2^2 = \frac{(-101)^2 + (-131)^2 + (-81)^2 + (-41)^2 + 39^2 + 9^2 + 69^2 + (-21)^2 + 99^2 + 149^2}{10} = 7441,$$

$$\bar{x}_3 = \frac{100+270+330+300+240+380+190+130+210+150}{10} = 230,$$

$$s_3^2 = \frac{(-130)^2 + 40^2 + 100^2 + 70^2 + 10^2 + 150^2 + (-40)^2 + (-100)^2 + (-20)^2 + (-80)^2}{10} = 7440.$$

所以 $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2 \dots$

古典概型与独立性检验相结合:

例 1. (2021·吉林吉林市·高三三模(理)) 2020 年是决胜全面建成小康社会、决战脱贫攻坚之年, 面对新冠肺炎疫情和严重洪涝灾害的考验. 党中央坚定如期完成脱贫攻坚目标决心不动摇, 全党全社会戮力同心真抓实干, 取得了积极成效. 某贫困县为了响应国家精准扶贫的号召, 特地承包了一块土地, 已知土地的使用面积 x 与相

应的管理时间 y 的关系如下表所示：

土地使用面积 x （单位：亩）	1	2	3	4	5
管理时间 y （单位：月）	8	11	14	24	23

并调查了某村 300 名村民参与管理的意愿，得到的部分数据如下表所示：

	愿意参与管理	不愿意参与管理
男性村民	140	60
女性村民	40	

(1) 做出散点图，判断土地使用面积 x 与管理时间 y 是否线性相关；并根据相关系数 r 说明相关关系的强弱. (若 $|r| \geq 0.75$ ，认为两个变量有很强的线性相关性， r 值精确到 0.001) .

(2) 若以该村的村民的性别与参与管理意愿的情况估计贫困县的情况，且每位村民参与管理的意愿互不影响，则从该贫困县村民中任取 3 人，记取到不愿意参与管理的女性村民的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

参考公式：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

参考数据： $\bar{y} = 16, \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 206, \sqrt{515} \approx 22.7$

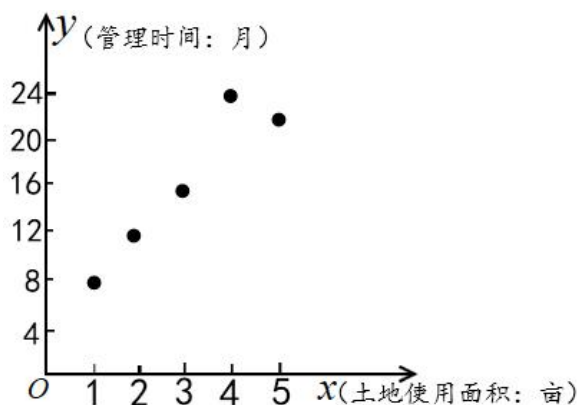
【答案】(1) 答案见解析；(2) 分布列见解析， $\frac{3}{5}$.

【分析】(1) 作出散点图. 再由已知数据计算 $r \approx 0.947$ ，由 $0.947 > 0.75$ ，可得结论；

(2) 由已知得该贫困县中任选一人，取到不愿意参与管理的女性村民的概率 $p = \frac{1}{5}$ ，随机变量 X 可取 0, 1, 2, 3，

$X: B\left(3, \frac{1}{5}\right)$ ，可求得数学期望..

【解析】(1) 散点图如下图，由散点图可知，管理时间 y 与土地使用面积 x 线性相关.



依题意: $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, 又 $\bar{y} = 16$,

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-2) \times 8 + (-1) \times (-5) + 0 \times (-2) + 1 \times 8 + 2 \times 7 = 43,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 206,$$

$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{43}{\sqrt{10 \times 206}} = \frac{43}{2\sqrt{515}} \approx \frac{43}{45.4} \approx 0.947,$$

由于 $0.947 > 0.75$, 故管理时间 y 与土地使用面积 x 线性相关性较强

(2) 由题知调查的 300 名村名中有不愿意参与管理的女性村民人数为 $300 - (140 + 40 + 60) = 60$,

该贫困县中任选一人, 取到不愿意参与管理的女性村民的概率 $p = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$, 则 X 可取 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{48}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}, \quad P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125},$$

$$\text{即: } X \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right), \quad P(X=K) = C_3^K \times \left(\frac{1}{5}\right)^K \times \left(\frac{4}{5}\right)^{3-K}, \quad K=0, 1, 2, 3$$

X 的分布列

X	0	1	2	3

P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$E(X) = 0 \times \frac{64}{125} + 1 \times \frac{48}{125} + 2 \times \frac{12}{125} + 3 \times \frac{1}{125} = \frac{3}{5}, \text{ 即 } E(X) = nP = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

【点睛】方法点睛：本题考查概率的求法，考查离散型随机变量的分布列及数学期望的求法，是中档题，求解离散型随机变量分布列的步骤是：

1. 首先确定随机变量 X 的所有可能取值；
2. 计算 X 取得每一个值的概率，可通过所有概率和为1来检验是否正确；
3. 进行列表，画出分布列的表格；
4. 最后扣题，根据题意求数学期望或者其它.

例2. 某高校为调查学生喜欢“应用统计”课程是否与性别有关，随机抽取了选修课程的55名学生，得到数据如下表：

	喜欢“应用统计”课程	不喜欢“应用统计”课程	总计
男生	20	5	25
女生	10	20	30
总计	30	25	55

(1)判断是否有99.5%的把握认为喜欢“应用统计”课程与性别有关？

(2)用分层抽样的方法从喜欢统计课程的学生中抽取6名学生做进一步调查，将这6名学生作为一个样本，从中任选2人，求恰有1个男生和1个女生的概率.

下面的临界值表供参考：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.25	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$)

【解析】(1)由公式 $K^2 = \frac{55 \times (20 \times 20 - 10 \times 5)^2}{30 \times 25 \times 25 \times 30} \approx 11.978 > 7.879$,

所以有99.5%的把握认为喜欢“应用统计”课程与性别有关.

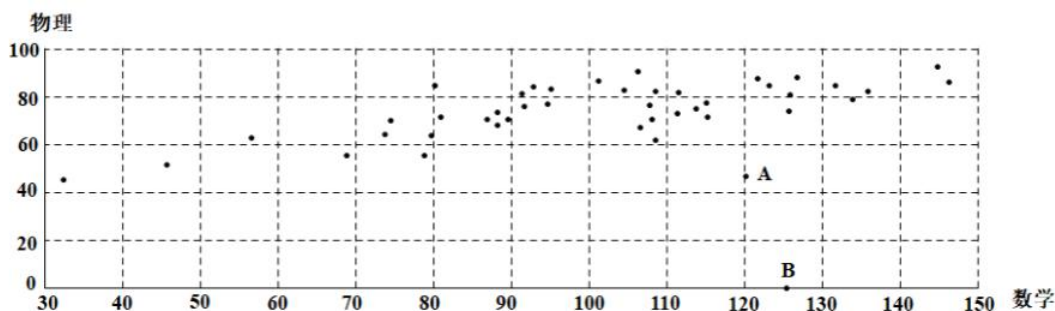
(2)设所抽样本中有 m 个男生，则 $\frac{6}{30} = \frac{m}{20}$ ，得 $m=4$ ，所以样本中有4个男生，2个女生，分别记作

$B_1, B_2, B_3, B_4, G_1, G_2$. 从中任选2人的基本事件有 $(B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_1, B_4), (B_1, G_1),$

$(B_1, G_2), (B_2, B_3), (B_2, B_4), (B_2, G_1), (B_2, G_2), (B_3, B_4), (B_3, G_1), (B_3, G_2), (B_4, G_1),$
 $(B_4, G_2), (G_1, G_2)$, 共 15 个, 其中恰有 1 个男生和 1 个女生的事件有 $(B_1, G_1), (B_1, G_2), (B_2, G_1),$
 $(B_2, G_2), (B_3, G_1), (B_3, G_2), (B_4, G_1), (B_4, G_2)$, 共 8 个. 所以恰有 1 个男生和 1 个女生的概率为 $\frac{8}{15}$.

回归方程与二项分布结合

例 1. (2021·湖南长沙市·长郡中学高三二模) 某地区在一次考试后, 从全体考生中随机抽取 44 名, 获取他们本次考试的数学成绩(x)和物理成绩(y), 绘制成如图散点图:



根据散点图可以看出 y 与 x 之间有线形相关关系, 但图中有两个异常点 A, B . 经调查得知, A 考生由于重感冒导致物理考试发挥失常, B 考生因故未能参加物理考试. 为了使分析结果更科学准确, 剔除这两组数据后, 对剩下的数据作处理, 得到一些统计的值:

$$\sum_{i=1}^{42} x_i = 4641, \sum_{i=1}^{42} y_i = 3108, \sum_{i=1}^{42} x_i y_i = 350350, \sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})^2 = 13814.5, \sum_{i=1}^{42} (y_i - \bar{y})^2 = 5250, \text{ 其中 } x_i, y_i \text{ 分别表示}$$

这 42 名同学的数学成绩、物理成绩, $i=1, 2, \dots, 42$, y 与 x 的相关系数 $r=0.82$.

(1) 若不剔除 A, B 两名考生的数据, 用 44 组数据作回归分析, 设此时 y 与 x 的相关系数为 r_0 . 试判断 r_0 与 r 的大小关系, 并说明理由;

(2) 求 y 关于 x 的线性回归方程 (系数精确到 0.01), 并估计如果 B 考生加了这次物理考试 (已知 B 考生的数学成绩为 125 分), 物理成绩是多少? (精确到个位);

(3) 从概率统计规律看, 本次考试该地区的物理成绩 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 以剔除后的物理成绩作为样本, 用样本平均数 $\bar{y}$ 作为 μ 的估计值, 用样本方差 s^2 作为 σ^2 的估计值. 试求该地区 5000 名考生中, 物理成绩位于区间 $(62.8, 85.2)$ 的人数 Z 的数学期望.

附: ①回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

②若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) \approx 0.6826, P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) \approx 0.9544$

③ $\sqrt{125} \approx 11.2$

【答案】(1) $r_0 < r$, 理由详见解析; (2) $\hat{y} = 0.50x + 18.64$, 81 分; (3) 3413.

【分析】(1) 结合散点图, 可得出结论; (2) 利用题中给的相关系数, 最小二乘法写出回归直线方程, 再令 $x = 125$, 即可算出答案; (3) 算出 $\bar{y}$, s^2 , 得到 $\xi \sim N(74, 125)$, $\sqrt{125} \approx 11.2$, 所以 $P(62.8 < \xi < 85.2) = P(74 - 11.2 < \xi < 74 + 11.2) \approx 0.6826$, 因为 $Z \sim B(5000, 0.6826)$, 即可算出期望.

【解析】(1) $r_0 < r$. 理由如下: 由图可知, y 与 x 成正相关关系,

①异常点 A, B 会降低变量之间的线性相关程度.

②44 个数据点与其回归直线的总偏差更大, 回归效果更差, 所以相关系数更小.

③42 个数据点与其回归直线的总偏差更小, 回归效果更好, 所以相关系数更大.

④42 个数据点更贴近其回归直线 l .

⑤44 个数据点与其回归直线更离散.

(2) 由题中数据可得: $\bar{x} = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} x_i = 110.5, \bar{y} = \sum_{i=1}^{42} y_i = 74$,

所以 $\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{42} x_i y_i - 42\bar{x} \cdot \bar{y} = 350350 - 42 \times 110.5 \times 74 = 6916$,

又因为 $\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})^2 = 13814.5$, 所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{6916}{13814.5} \approx 0.501$,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 74 - 0.501 \times 110.5 \approx 18.64$, 所以 $\hat{y} = 0.50x + 18.64$,

将 $x = 125$ 代入, 得 $y = 0.50 \times 125 + 18.64 = 62.5 + 18.64 \approx 81$, 所以估计 B 同学的物理成绩约为 81 分.

(3) $\bar{y} = \sum_{i=1}^{42} y_i = 74, s^2 = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{42} \times 5250 = 125$, 所以 $\xi \sim N(74, 125)$, 又因为 $\sqrt{125} \approx 11.2$,

所以 $P(62.8 < \xi < 85.2) = P(74 - 11.2 < \xi < 74 + 11.2) = 0.6826$,

因为 $Z \sim B(5000, 0.6826)$, 所以 $E(Z) = 5000 \times 0.6826 = 3413$,

即该地区本次考试物理成绩位于区间 $(62.8, 85.2)$ 的数学期望为 3413.

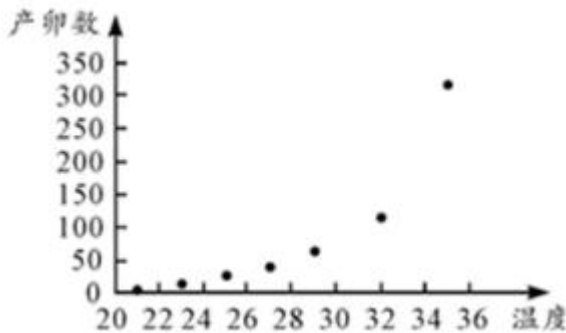
【点睛】 本题考查回归直线方程与正态分布的综合应用，涉及到正态分布的知识，考查学生的数学运算、数据分析、数学建模的能力，是一道中档题.

例 2. 红铃虫是棉花的主要害虫之一，能对农作物造成严重伤害. 每只红铃虫的平均产卵数 y 和平均温度 x 有关. 现收集了以往某地的 7 组数据，得到下面的散点图及一些统计量的值.

平均温度 $x/^{\circ}\text{C}$	21	23	25	27	29	32	35
平均产卵数 y /个	7	11	21	24	66	115	325

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
27. 429	81. 286	3. 612	40. 182	147. 714

表中 $z_i = \ln y$, $\bar{z} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 z_i$



(1) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = ce^{dx}$ (其中 $e = 2.718 \cdots$ 为自然对数的底数) 哪一个更适宜作为平均产卵数 y 关于平均温度 x 的回归方程类型? (给出判断即可不必说明理由) 并由判断结果及表中数据, 求出 y 关于 x 的回归方程. (计算结果精确到小数点后第三位)

(2) 根据以往统计, 该地每年平均温度达到 28°C 以上时红铃虫会造成严重伤害, 需要人工防治, 其他情况均不需要人工防治, 记该地每年平均温度达到 28°C 以上的概率为 $p(0 < p < 1)$.

(i) 记该地今后 5 年中, 恰好需要 3 次人工防治的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值, 并求出相应的概率 p_0 .

(ii) 当 $f(p)$ 取最大值时, 记该地今后 5 年中, 需要人工防治的次数为 X , 求 X 的数学期望和方差.

附: 对于一组数据 $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \cdots, (x_7, z_7)$, 其回归直线 $\hat{z} = \hat{a} + \hat{b}x$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{z} - \hat{b}\bar{x}.$$

【答案】(1) $y = ce^{dx}$ 更适宜; $\hat{y} = e^{0.272x-3.849}$ (2)(i) $f(p)_{\max} = \frac{216}{625}$, 此时相应的概率为 $p_0 = \frac{3}{5}$ (ii) $E(X) = 3$,

$$D(X) = \frac{6}{5}.$$

【解析】(1) 根据散点图可以判断 $y = ce^{dx}$ 更适宜作为平均产卵数 y 关于平均温度 x 的回归方程类型.

对 $y = ce^{dx}$ 两边取自然对数得 $\ln y = \ln c + dx$, 令 $z = \ln y$, $a = \ln c$, $b = d$, 得 $z = a + bx$.

$$\text{因为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{40.182}{147.714} \approx 0.2720, \text{ 所以 } \hat{a} = \bar{z} - \hat{b}\bar{x} = 3.612 - 0.272 \times 27.429 \approx -3.849,$$

所以 z 关于 x 的线性回归方程为 $\bar{z} = 0.272x - 3.849$, 所以 y 关于 x 的回归方程为 $\bar{y} = e^{0.272x-3.849}$.

(2) (i) 由 $f(p) = C_5^3 p^3 (1-p)^2$, 得 $f'(p) = C_5^3 p^2 (1-p)(3-5p)$, 因为 $0 < p < 1$,

令 $f'(p) > 0$ 得 $3-5p > 0$, 解得 $0 < p < \frac{3}{5}$; 令 $f'(p) < 0$ 得 $3-5p < 0$, 解得 $\frac{3}{5} < p < 1$,

所以 $f(p)$ 在 $\left(0, \frac{3}{5}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ 上单调递减, 所以 $f(p)$ 有唯一极大值 $f\left(\frac{3}{5}\right)$, 也为最大值.

所以当 $p = \frac{3}{5}$ 时, $f(p)_{\max} = \frac{216}{625}$, 此时响应的概率 $p_0 = \frac{3}{5}$.

(ii) 由 (i) 知, 当 $f(p)$ 取最大值时, $p = \frac{3}{5}$, 所以 $x \sim b\left(5, \frac{3}{5}\right)$,

所以 $E(X) = 5 \times \frac{3}{5} = 3$, $D(X) = 5 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

【反思提升】1. 对古典概型必须明确判断两点: ①对于每个随机试验来说, 所有可能出现的试验结果数 n 必须是有限个; ②出现的各个不同的试验结果数 m 其可能性大小必须是相同的. 只有在同时满足①、②的条件下,

运用的古典概型计算公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 得出的结果才是正确的.

2. 对于几何概型的概率公式中的“测度”要有正确的认识,它只与大小有关,而与形状和位置无关,在解题时,要掌握“测度”为长度、面积、体积、角度等常见的几何概型的求解方法.

3. 样本的数字特征常见的命题角度有:(1)样本的数字特征与直方图交汇;(2)样本的数字特征与茎叶图交汇;(3)样本的数字特征与优化决策问题.

4. (1) 用样本估计总体是统计的基本思想,而利用频率分布表和频率分布直方图来估计总体则是用样本的频率分布去估计总体分布的两种主要方法.分布表在数量表示上比较准确,直方图比较直观.

(2) 频率分布表中的频数之和等于样本容量,各组中的频率之和等于 1;在频率分布直方图中,各小长方形的面积表示相应各组的频率,所以,所有小长方形的面积的和等于 1.

5. 随机变量的分布列问题:

(1) 求随机变量的分布列的主要步骤:一是明确随机变量的取值,并确定随机变量服从何种概率分布;二是求每一个随机变量取值的概率,三是列成表格;(2) 求出分布列后注意运用分布列的两条性质检验所求的分布列是否正确;(3) 求解离散随机变量分布列和方差,首先要理解问题的关键,其次

要准确无误的找出随机变量的所有可能值,计算出相对应的概率,写成随机变量的分布列,正确运用均值、方差公式进行计算.