# 高考数学必背公式整理

（衡水中学高三数学学科组）

## 一、集合

1. 元素 $a$ 属于(不属于)集合 $A$ 记为 $a\in A(a\notin A)$.
2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. 若 $\forall x\in A$ 有 $x\in B$,则有 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).
5. 若 $A\subseteq B$, $\exists x\in B$,且 $x\notin A$,则有 $A\subsetneqq B$.
6. $A\subseteq B, B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.
7. 空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subseteq A$($A$ 为任意集合);空集是任意非空集合的真子集.
8. 含有 $n$ 个元素的集合有 $2^n$ 个子集,有 $2^n-1$ 个真子集,有 $2^n-2$ 个非空真子集.
9. $A\cap B=\{x\mid x\in A$,且 $x\in B\}$.
10. $A\cup B=\{x\mid x\in A$,或 $x\in B\}$.
11. $A\cup A=A, A\cup\varnothing=A; A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.
12. $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A, A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.
13. $\complement_U A=\{x\mid x\in \mathbf{U}$,且 $x\notin A\}$.
14. $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;
    $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

## 二、数列

1. 数列的通项公式与前 **n** 项和的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2).\end{cases}$$

2. 等差数列

(1)定义:$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*$, $d$ 为常数).

(2)通项公式:$a_n=a_1+(n-1)d$.

(3)等差中项:$a,A,b$ 成等差数列$\Leftrightarrow 2A=a+b\left(\text{或 } A=\frac{a+b}{2}\right)$.

(4)性质:$m+n=k+l\Rightarrow a_m+a_n=a_k+a_l(m,n,k,l\in\mathbf{N}^*)$.

(5)前 **n** 项和:$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

3. 等比数列

(1)定义:$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in\mathbf{N}^*$, $q$ 为非零常数).

(2)通项公式:$a_n=a_1q^{n-1}$.

(3)等比中项:$a,G,b$ 成等比数列$\Rightarrow G^2=ab$.

(4)性质:$m+n=k+l\Rightarrow a_ma_n=a_ka_l(m,n,k,l\in\mathbf{N}^*)$.

(5)前 **n** 项和:$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1).\end{cases}$

4. 常用求和公式

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

## 三、基本初等函数

1. 指数

(1)根式

$(\sqrt[n]{a})^n=a(n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$; $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n\text{ 为大于 1 的奇数}),\\ |a| & (n\text{ 为大于 0 的偶数}).\end{cases}$

(2)分数指数幂

正分数指数幂:$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$;

负分数指数幂:$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$.

(3)有理数指数幂的运算性质

$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂 $a^\alpha(a>0$, $\alpha$ 是无理数).

2. 对数

(1)基本性质

①负数和零没有对数;

②$\log_a a=1,\log_a 1=0(a>0,a\neq1)$.

(2)常用对数 $\log_{10}N$ 记为 $\lg N$;自然对数 $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

(3)运算性质

设 $M>0,N>0,a>0,a\neq1$,则有

①$\log_a(M\cdot N)=\log_aM+\log_aN$;

②$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$;

③$\log_aM^n=n\log_aM(n\in\mathbf{R})$.

(4)公式

对数恒等式:$a^{\log_aN}=N(N>0,a>0$,且 $a\neq1)$.

换底公式:$\log_ab=\frac{\log_cb}{\log_ca}(a>0$,且 $a\neq1,c>0$,且 $c\neq1,b>0)$.

特别地:$\log_ab=\frac{1}{\log_ba}(a>0,b>0$,且 $a\neq1,b\neq1)$.

## 四、三角函数

1. 角度和弧度的换算

$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}=0.017\ 45\text{rad}$

$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°=57.30°=57°18'$

2. 弧度制下扇形的弧长和面积公式

(1)弧长公式:$l=|\alpha|r$;

(2)扇形面积公式:$S=\frac{1}{2}lr$.

其中,$l$ 为弧长,$r$ 为圆的半径,$\alpha$ 为圆心角的弧度数.

3. 同角三角函数的基本关系

平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

商数关系:$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$.

4. 三角函数的诱导公式

$\sin(k\cdot360°+\alpha)=\sin\alpha$　$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(k\cdot360°+\alpha)=\cos\alpha$　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(k\cdot360°+\alpha)=\tan\alpha$　$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha$　$\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

$\cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$　$\cos(180°\pm\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(90°\pm\alpha)=\mp\cot\alpha$　$\tan(180°\pm\alpha)=\pm\tan\alpha$

## 五、三角恒等变换

1. 两角和与差的三角函数、倍角公式

(1)两角和与差的三角函数

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

(2)倍角公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2. 积化和差与和差化积公式

(1)积化和差公式

$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

(2)和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3. 半角公式

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$　$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

4. 辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)(ab\neq0)$,其中 $\varphi$ 满足 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

## 六、解三角形

1. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

2. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论:$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

3. 三角形面积公式

(1)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$($A,B,C$ 是$\triangle ABC$ 的三角 $a,b,c$ 所对的边).

(2)$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$.

(3)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$($r$ 为三角形内切圆半径).

## 七、不等式

1. 不等式的性质

(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$;　(2)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$;

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$;　(4)$a+b>c\Rightarrow a>c-b$;

(5)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;　(6)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;

(7)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;　(8)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ $(n\in\mathbf{N},n\geq2)$;

(9)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in\mathbf{N},n\geq2)$.

2. 不等式及其解法

(1)一元二次不等式及其解法

| $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集 | $\{x\mid x<x_1$,或 $x>x_2\}$ $(x_1<x_2)$ | $\left\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$ | $\mathbf{R}$ |
| $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集 | $\{x\mid x_1<x<x_2\}$ $(x_1<x_2)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

(2)一元高次不等式的解法

一元高次不等式$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0(<0)$(其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$)可用穿根法求解.

(3)分式不等式的解法

$\frac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$;

$\frac{f(x)}{g(x)}\geq0(\leq0)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\neq0,\\ f(x)\cdot g(x)\geq0(\leq0).\end{cases}$

(4)绝对值不等式的解法

①$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq0,\\ f(x)<g(x),\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)<g(x);\end{cases}$

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

②$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq0,\\ f(x)>g(x),\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)>g(x);\end{cases}$

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$.

③$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2$.

④形如$|x-a|+|x-b|<c$的不等式可利用零点分段讨论求解.

3. 重要不等式

(1)$a^2+b^2\geq2ab$.其中 $a,b\in\mathbf{R}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(2)基本不等式:$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

其中 $a,b>0$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(3)$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

其中,$a,b>0$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(4)$4ab\leq(a+b)^2\leq2(a^2+b^2)$.

其中,$a,b\in\mathbf{R}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(5)$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geq ab+bc+ca$.

其中,$a,b,c\in\mathbf{R}$,当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

(6)$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geq2$,当且仅当$|a|=|b|$时等号成立.

4. 利用基本不等式求最值

已知 $x,y>0$,则

(1)若 $x+y=s$(和为定值),则当 $x=y$ 时,积 $xy$ 取得最大值 $\frac{s^2}{4}\left(xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{s^2}{4}\right)$.

(2)若 $xy=p$(积为定值),则当 $x=y$ 时,和 $x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$ $(x+y\geq2\sqrt{xy}=2\sqrt{p})$.

## 八、立体几何

1. 空间几何体的侧面积公式

(1)$S_{正棱柱侧}=Ch$　(2)$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}Ch'$

(3)$S_{圆柱侧}=2\pi rl$　(4)$S_{圆锥侧}=\pi rl$

(5)$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l$

2. 空间几何体的表面积公式

(1)$S_{圆柱}=2\pi r(r+l)$　(2)$S_{圆锥}=\pi r(r+l)$

(3)$S_{圆台}=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$　(4)$S_{球}=4\pi R^2$

3. 空间几何体的体积公式

(1)$V_{柱体}=Sh$　(2)$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

(3)$V_{台体}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$　(4)$V_{圆柱}=\pi r^2h$

(5)$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$　(6)$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$

(7)$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

4. 平面的基本性质

公理 1:$A\in l,B\in l$,且 $A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$.

公理 2:$A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且 $A,B,C$ 三点不共线$\Rightarrow\alpha$ 与 $\beta$ 重合.

公理 3:$P\in\alpha$,且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$,且 $P\in l$.

5. 空间两直线平行的判定

(1)$\left.\begin{array}{l}a/\!/b\\ b/\!/c\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/c$　(2)$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

(3)$\left.\begin{array}{l}a/\!/\alpha\\ a\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b$　(4)$\left.\begin{array}{l}\alpha/\!/\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

6. 空间两直线垂直的判定

(1)$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b/\!/\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b$　(2)$\left.\begin{array}{l}a/\!/b\\ l\perp a\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp b$

(3)三垂线定理及其逆定理

7. 空间两直线异面的判定方法

(1)反证法；

(2)平面外一点与平面内一点的连线，与平面内不过该点的直线是异面直线.

8. 直线与平面平行的判定

(1)$\left.\begin{matrix}a\not\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a\parallel b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$　(2)$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ a\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel\beta$

9. 直线与平面平行的性质

$\left.\begin{matrix}a\parallel\beta\\ a\subset\alpha\\ \alpha\cap\beta=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

10. 平面与平面平行的判定

(1)$\left.\begin{matrix}a\subset\beta,b\subset\beta\\ a\cap b=P\\ a\parallel\alpha,b\parallel\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\beta\parallel\alpha$　(2)$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ a\perp\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$　(3)$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\gamma\\ \beta\parallel\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

11. 平面与平面平行的性质

$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

12. 直线与平面垂直的判定

(1)$\left.\begin{matrix}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\ a\cap b=A\\ l\perp a,l\perp b\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$　(2)$\left.\begin{matrix}a\parallel b\\ a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$

13. 直线与平面垂直的性质

(1)$\left.\begin{matrix}l\perp\alpha\\ l\perp\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\beta\parallel\alpha$　(2)$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

14. 平面与平面垂直的判定

(1)$\left.\begin{matrix}l\perp\alpha\\ l\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\beta\perp\alpha$　(2)二面角的平面角 $\theta=90°$

15. 平面与平面垂直的性质

(1)$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=CD\\ AB\subset\alpha,AB\perp CD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp\beta$　(2)$\left.\begin{matrix}A\in\alpha,A\in a\\ \alpha\perp\beta,a\perp\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\subset\alpha$

## 九、直线、圆与方程

1. 直线与方程

(1)直线方程

①点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$；

②斜截式：$y=kx+b$；

③两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$；

④截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$；

⑤一般式：$Ax+By+C=0$($A,B$不同时为0).

(2)直线的斜率公式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$的直线的斜率公式：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

(3)两条直线的位置关系

①$l_1(y=k_1x+b_1)$与 $l_2(y=k_2x+b_2)$平行：$k_1=k_2$且 $b_1\neq b_2$；

②$l_1(y=k_1x+b_1)$与 $l_2(y=k_2x+b_2)$垂直：$k_1k_2=-1$；

③$l_1(A_1x+B_1y+C_1=0)$与 $l_2(A_2x+B_2y+C_2=0)$平行：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq0)$；

④$l_1(A_1x+B_1y+C_1=0)$与 $l_2(A_2x+B_2y+C_2=0)$垂直：$A_1A_2+B_1B_2=0$.

(4)距离公式

①两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$间的距离：

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 特别地，原点 $O(0,0)$与任意一点 $P(x,y)$的距离 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

②点 $P(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离：

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

③两平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离：

$d=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2. 圆与方程

(1)圆与方程

①圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为$(a,b)$，半径为 $r$.

②圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D^2+E^2-4F>0$，圆心为$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，半径 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

(2)直线与圆的位置关系

设直线 $l:Ax+By+C=0$，圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心到直线的距离为 $d$，则 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$：

$d>r\Leftrightarrow$直线与圆相离；

$d=r\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$d<r\Leftrightarrow$直线与圆相交.

(3)过圆上一点的切线方程

①与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切于点$(x_0,y_0)$的切线方程：$x_0x+y_0y=r^2$.

②与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相切于点$(x_0,y_0)$的切线方程：$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

(4)圆与圆的位置关系

设两圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$，$C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$，圆心距 $d=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$，则

$|d|>r_1+r_2\Leftrightarrow$两圆相离；

$|d|=r_1+r_2\Leftrightarrow$两圆外切；

$|r_1-r_2|<|d|<r_1+r_2\Leftrightarrow$两圆相交；

$|d|=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$两圆内切；

$|d|<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$两圆内含.

(5)直线被圆所截弦的问题

设直线与圆相交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则弦 $AB$ 的长：

①$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$($k$为直线 $AB$ 的斜率).

②$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$($d$为弦心距，$r$为圆的半径).

3. 空间直角坐标系

(1)空间两点间的距离公式

①空间中的任意一点 $P(x,y,z)$与原点的距离：

$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

②空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离：

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

(2)空间线段的中点坐标

在空间直角坐标系中，若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则线段 $AB$ 的中点坐标是：$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

## 十、圆锥曲线与方程

1. 椭圆的标准方程及几何性质

标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$

焦点：$(\pm c,0)$或$(0,\pm c)$

离心率：$e=\dfrac{c}{a}(0<e<1,c^2=a^2-b^2)$

2. 双曲线的标准方程及几何性质

标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$或$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a,b>0)$

焦点：$(\pm c,0)$或$(0,\pm c)$

渐近线：$y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 或 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

离心率：$e=\dfrac{c}{a}(e>1,c^2=a^2+b^2)$

3. 抛物线的标准方程及几何性质

标准方程：$y^2=2px(p>0)$

焦点：$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$

焦半径：$|MF|=x_0+\dfrac{p}{2}$

准线方程：$x=-\dfrac{p}{2}$

4. 直线截圆锥曲线的弦长

设弦 $AB$ 的端点坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $AB$ 的斜率为 $k$，则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

## 十一、平面向量

1. 向量的概念

(1)向量的基本要素：大小、方向.

(2)向量的表示

字母表示：$\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$.

坐标表示：$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$.

(3)向量的模：向量的模即向量的大小，记作$|\boldsymbol{a}|$.

若 $a=(x_1,y_1)$，则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

(4)特殊的向量：

①零向量：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=0$.

②单位向量：$\boldsymbol{a}$为单位向量$\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=1$.

③相等向量：长度相等且方向相同的向量.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$.

2. 向量的运算

(1)向量的加减法

几何运算：三角形法则或平行四边形法则.

坐标运算：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$.

(2)实数与向量的积

定义：$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，满足 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$与 $\boldsymbol{a}$ 同向；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$与 $\boldsymbol{a}$ 反向；$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

坐标运算：$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

(3)向量的数量积

定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 $\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

坐标运算：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

3. 重要公式

(1)平面向量基本定理：$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$不共线.

(2)距离公式：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(3)非零向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(4)非零向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(5)夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

## 十二、导数及其应用

1. 几种常见函数的导数

(1)$c'=0$($c$为常数)　(2)$(x^n)'=nx^{n-1}(n\in\mathbf{Q}$，且 $n\neq0)$

(3)$(\sin x)'=\cos x$　(4)$(\cos x)'=-\sin x$

(5)$(e^x)'=e^x$　(6)$(a^x)'=a^x\ln a(a>0$，且 $a\neq1)$

(7)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}(x>0)$　(8)$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(x>0,a>0$，且 $a\neq1)$

2. 导数运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq0)$.

3. 复合函数的导数

若函数 $u=g(x)$在 $x$ 处可导，$y=f(u)$在 $u$ 处可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$在 $x$ 处可导，且 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

4. 定积分的基本性质

(1)$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$为常数)；

(2)$\int_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$；

(3)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$(其中 $a<c<b$).

5. 微积分基本定理

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$(其中 $F'(x)=f(x)$).

## 十三、统计与概率

1. 统计

(1)方差与标准差

方差：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$

标准差：$s=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$

其中，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

(2)离散型随机变量的均值(或数字期望)与方差

①离散型随机变量的均值：

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$.

性质：$E(aX+b)=aE(X)+b$($a,b$是常数)；

若 $X$ 服从两点分布，则 $E(X)=p$；

若 $X$ 服从二项分布，即 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$.

②离散型随机变量的方差：$D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$.

性质：$D(aX+b)=a^2D(X)$($a,b$是常数)；

若 $X$ 服从两点分布，则 $D(X)=p(1-p)$；

若 $X$ 服从二项分布，则 $X\sim B(n,p)$，则 $D(X)=np(1-p)$.

2. 概率

(1)概率的加法公式

如果事件 $A$ 与事件 $B$ 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

若事件 $A$ 与事件 $B$ 为对立事件，则 $P(A)=1-P(B)$.

(2)古典概型的概率公式

$P(A)=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\dfrac{m}{n}$.

(3)几何概型的概率公式

$P(A)=\dfrac{\text{构成事件 }A\text{ 的区域长度(面积或体积)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}}$.

(4)条件概率

设 $A$，$B$ 为两个事件，则 $A$ 发生的条件下 $B$ 发生的概率：

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$. 其中 $P(A)>0$.

如果 $B$ 和 $C$ 是两个互斥事件，则

$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

(5)$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$. 其中事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 相互独立.

特别地，如果事件 $A$ 与事件 $B$ 相互独立，则有

$P(AB)=P(A)P(B)$.

(6)①两点分布(0−1 分布)：$P(X=0)=1-p$；$P(X=1)=p$.

②超几何分布：$P(X=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2,\cdots,m)$.

其中 $m=min\{M,n\}$，且 $n\leqslant N$，$M\leqslant N$，$m,M,N\in\mathbf{N}^*$.

③二项分布：$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$.

## 十四、常用逻辑用语

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 | 真 | 假 |
| 真 | 假 | 假 | 真 | 假 |
| 假 | 真 | 假 | 真 | 真 |
| 假 | 假 | 假 | 假 | 真 |